Program Studi Teknik Informatika Nama :…………………………

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika NIM :…………………………

Institut Teknologi Bandung T.tangan:…………………………

Kuis ke-2 IF2123 Aljabar Linier dan Geometri (3 SKS) – Vektor di ruang Euclidean, Ruang vektor umum

Dosen: Rila Mandala, Rinaldi M, Judhi Santoso/Arrival Dwi Sentosa

Selasa, 23 Oktober 2024

Waktu: 90 menit

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

1. Diberikan tiga buah vector di R3 yaitu **u** = (-3, 1, 2) **v** = (4, 5, 1) **w** = (1, 2, -4), semua vektor berawal dari titik (0, 0, 0).
2. Hitung
3. Apakah {**u**, **v**, **w**} himpunan ortogonal?
4. Jika vektor **v** dan **w** terletak pada sebuah bidang, tentukan persamaan bidang tersebut
5. Tentukan persamaan bidang yang melalui titik (3, -1, 2) dan paralel dengan bidang pada jawaban c
6. Tentukan jarak antara kedua bidang paralel (jawaban c dan d)
7. Tentukan jarak titik (3, -1, 2) ke bidang pada jawaban c
8. Tentukan volume *paralelpiped* yang dibentuk oleh vektor **u**, **v**, dan **w**.

**(Nilai: 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3)**

**Jawaban:**

1. **=** (-3, 1, 2) + 3(4, 5, 1) – (1, 2, -4) = (-3, 1, 2) + (12, 15, 3) – (1, 2, -4)

= (-3 + 12 – 1, 1 + 15 – 2, 2 + 3 + 4)

= (8, 14, 9)

= = =

= (1)(-3) + (2)(1) + (-4)(2) = -3 + 2 – 8 = -9

= -9 atau = -166.1956678

1. Tes  **= -**9 ≠ 0, oleh karena itu dapat disimpulkan {**u**, **v**, **w**} bukan himpunan ortogonal
2. Tentukan vektor normal bidang:

**n** = **v** x **w** = = **i** – **j** + **k** = -22**i** + 17**j** + 3**k**

Jadi, **n** = (-22, 17, 3)

Persamaan bidang dengan n = (-22, 17, 3) yang melalui titik (4, 5, 1) adalah:

a(x – x0) + b(y – y0) + c(z – z0) = 0

-22(x – 4) + 17(y – 5) + 3(z – 1) = 0

-22x + 88 + 17y – 85 + 3z – 3 = 0

-22x + 17y + 3z = 0

22x – 17y – 3z = 0

Jika melalui titik (1, 2, -4):

-22(x – 1) + 17(y – 2) + 3(z + 4) = 0

-22x + 22 + 17y – 34 + 3z + 12 = 0

-22x + 17y + 3z = 0

22x – 17y – 3z = 0

Hasilnya sama

1. Bidang yang paralel dengan bidang pada jawaban c memiliki normal yang sama, yaitu **n** = (-22, 17, 3), atau kelipatannya, dan melalui titik (3, -1, 2) adalah

a(x – x0) + b(y – y0) + c(z – z0) = 0

-22(x – 3) + 17(y + 1) + 3(z – 2) = 0

-22x + 66 + 17y + 17 + 3z – 6 = 0

-22x + 17y + 3z + 77 = 0

22x – 17y – 3z – 77 = 0

1. Jarak kedua bidang adalah (diketahui sebuah tiitk pada bidang d adalah (3, -1, 2), maka jarak titik itu ke bidang c (22x – 17y – 3z = 0) adalah

= = = = = 2.7535

1. Sama dengan jawaban c, yaitu 2.7535
2. Volume paralelpiped:

V = = -3 – 1 + 2 = 66+ 17 + 6 = 79

1. Misalkan basis *B* ={**u1**,**u2**} dan basis *B’* = {**u1**’, **u2**’} untuk R2 dimana

**u**1 **=** , **u**2 **=** , **u’**1 **=** , **u’**2 **=**

a). Tentukan matrik transisi P dari *B’* ke *B*

b). Tentukan matrik transisi P dari *B* ke *B’*

c). Hitunglah vektor koordinat [**w**]*B*, dimana **w** **=**

d). Hitunglan vektor koordinat [**w**]*B’*, menggunakan matrik transisi

**(Nilai: 5 + 5 + 5 + 5)**

**Jawaban:**

*;* R2*/*(*-5*)

1. [ basis baru | basis lama ] =

Matriks transisi adalah PB’→B =

1. [ basis baru | basis lama ] =

*;* R2*/*(*-5*)

Matriks transisi adalah PB’→B =

1. (3, -5) = c1(2, 2) + c2(4, -1)

2c1 + 4c2 = 3

2c1 – c2 = -5 -

-----------------------

5c2 = 8

c2 = 8/5

2c1 + 4c2 = 3

2c1 + 4(8/5) = 3

2c1 = 3 – 32/5

c1 = (-17/5)/2 = -17/10

Jadi, koordinatt **w** = (3, -5) pada basis B adalah (-17/10, 8/5)

1. Diketahui himpunan vektor polinom di P2 sebagai berikut: S = {**p1** = 3 + x – 4x2, **p2** = 2 + 5x + 6x2, **p3** = 1 + 4x + 8x2}.
2. Tunjukkan bahwa p1, p2, dan p3 adalah basis untuk P2
3. Tentukan dimensi P2
4. Tentukan polinom **p** di P2 yang koordinatnya vektornya adalah (**p**)S = (–1, 3, 2)

(**Nilai: 10 + 4 + 5)**

**Jawaban:**

1. **p1** = 3 + x – 4x2 → **p1** = (3, 1, -4)

**p2** = 2 + 5x + 6x2 → **p2** = (2, 5, 6)

**p3** = 1 + 4x + 8x2 → **p3** = (1, 4, 8)

Apakah S = {**p1**, **p2**, **p3**} basis untuk P2? Syarat sebuah himpunan vektor menjadi basis adalah:

1. S bebas linier
2. S membangun P2

Penyelesaian:

(i) Harus ditunjukkan bahwa **p1**, **p2**, dan **p3** bebas linier sbb:

k1(3, 1, -4) + k2(2, 5, 6) + k3(1, 4 , 8)= 0

Diperoleh SPL homogen:

3k1 + k2 - 4k3 = 0

2k1 + 5k2 + 6k3 = 0

k1 + 4k2  + 8k3 = 0

Harus ditunjukkan bahwa solusi SPL adalah trivial yaitu k1 = 0, k2 = 0, k3 = 0

(ii) Harus ditunjukkan bahwa **p1**, **p2**, dan **p3** membangun P2 sbb:

Misalkan vektor sembarang **w** = (w1, w2, w3) di P2 dapat dinyatakan sebagai **w** = k1**p1** + k2**p2** + k3**p3**

(w1, w2, w3) = k1(3, 1, -4) + k2(2, 5, 6) + k3(1, 4 , 8)

Diperoleh SPL:

3k1 + k2 - 4k3 = w1

2k1 + 5k2 + 6k3 = w2

k1 + 4k2  + 8k3 = w3

Harus ditunjukkan bahwa SPL di atas dapat dipecahkan.

Untuk (i) dan (ii) kita cukup menunjukkan bahwa matriks

A =

→ det(A) = 3(40 – 24) – (16 – 6) - 4(8 – 5) = 48 – 10 – 12 = 26

mempunyai balikan (*invers*), yaitu det(A) ≠ 0. Karena det(A) = 26, maka matriks A tersebut

dapat dibalikkan.

Oleh karena itu, SPL homogen:

3k1 + k2 - 4k3 = 0

2k1 + 5k2 + 6k3 = 0

k1 + 4k2  + 8k3 = 0

memiliki solusi trivial, dan SPL:

3k1 + k2 - 4k3 = w1

2k1 + 5k2 + 6k3 = w2

k1 + 4k2  + 8k3 = w3

dapat dipecahkan. Jadi, S = {**p1**, **p2**, **p3**} adalah basis untuk P2.

1. Dimensi = 3
2. **p** = (-1)**p1** + 3**p2** + 2**p3** = -(3 + x – 4x2) + 3(2 + 5x + 6x2) + 2(1 + 4x + 8x2)

= -3 – x + 4x2 + 6 + 15x + 18x2 + 2 + 8x + 16x2

= 5 + 22x + 38x2

1. Diberikan sebuah matriks A berukuran 4 x 5 sebagai beriku

1. Tentukan basis untuk ruang baris, ruang kolom, dan ruang null untuk matriks A
2. Tentukan *rank* dan *nullity* matriks A

**(Nilai: 15 + 5)**

**Jawaban:**

**(a)**

Basis untuk ruang baris adalah semua baris matriks R yang mengandung 1 utama:

𝐫𝟏 = [1 2 0 2 5]

𝐫𝟐 = [0 1 -1 -3 −2]

𝐫𝟑 = [0 0 0 1 1]

Basis untuk ruang kolom adalah semua kolom dari matriks A yang berkoresponden dengan kolom matriks R yang

mengandung 1 utama:

c1 = c2 = c3 =

Basis untuk ruang null diperoleh dengan menyelesaian Ax = 0:

~ ...OBE...~

Diperoleh persamaan sbb:

x1 + 2x2 + 2x4 + 5x5 = 0

x2 – x3 – 3x4 – 2x5 = 0

x4 + x5 = 0

x4 = -x5

x2 = x3 + 3x4 + 2x5 = x3 – 3x5 + 2x5 = x3 – x5

x1 = -2x2 – 2x4 – 5x5 = -2x2 + 2x5 – 5x5 = -2x2 – 3x5 = -2(x3 – x5) – 3x5 = -2x3 - x5

Misalkan x3 = s, x5 = t, s, t ∈ R

Maka:

x4 = -t

x2 = x3 – x5 = s – t

x1 = -2x3 – x5 = -2s – t

= *s* + *t*

Basis ruang null adalah dan

1. Rank(A) = dimensi ruang baris = dimensi ruang kolom = 3

Nullity(A) = dimensi ruang null = 2

Memenuhi kesamaan : Rank(A) + Nullity(A) = n

3 + 2 = 5

1. Diketahui 𝑇 : 𝑃2 → 𝑅3, *P*2 adalah polinom derajat 2, yang dalam hal ini,

𝑇(𝑎 + 𝑏𝑥 + 𝑐𝑥2) =

(a) Apakah *T* merupakan transformasi linier? Buktikan!

(b) Tentukan *T*(2 + 3*x* + 4*x*2)

**(Nilai: 8 + 2)**

Jawaban:

1. Jika T transformasi linier maka harus memenuhi T(**u** + **v**) = T(**u**) + T(**v**) dan T(k**u**) = kT(**u**)

Misalkan **u** = u1 + u2x + u3x2, **v** = v1 + v2x + v3x2

T(**u** + **v**) = T(u1 + u2x + u3x2 + v1 + v2x + v3x2) =

= T((u1 + v1) + (u2 + v2)x + (u3 + v3)x2)

=

=

= +

= T(**u**) + T(**v**)

T(k**u**) = T(ku1 + ku2x + ku3x2) = = k = kT(**u**)

Jadi, T adalah transformasi linier

(b) *T*(2 + 3*x* + 4*x*2) = =

6. Temukan matriks standar untuk operator T : R3→R3 yang pertama-tama memutar sebuah vektor

berlawanan arah jarum jam terhadap sumbu z melalui sudut θ, kemudian mencerminkan vektor yang

dihasilkan terhadap bidang yz, dan kemudian memproyeksikan vektor tersebut secara ortogonal ke

bidang xy.

**(Nilai: 10)**

Jawaban:

