Program Studi Teknik Informatika Nama :…………………………

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika NIM :…………………………

Institut Teknologi Bandung T.tangan:…………………………

Kuis ke-2 IF2123 Aljabar Linier dan Geometri (3 SKS) – Vektor di ruang Euclidean, Ruang vektor umum

Dosen: Rila Mandala, Rinaldi M, Judhi Santoso/Arrival Dwi Sentosa

Selasa, 23 Oktober 2024

Waktu: 90 menit

 ----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

1. Diberikan tiga buah vector di R3 yaitu **u** = (-3, 1, 2) **v** = (4, 5, 1) **w** = (1, 2, -4), semua vektor berawal dari titik (0, 0, 0).
2. Hitung $\left‖u+3v-w\right‖(w∙u)$
3. Apakah {**u**, **v**, **w**} himpunan ortogonal?
4. Jika vektor **v** dan **w** terletak pada sebuah bidang, tentukan persamaan bidang tersebut
5. Tentukan persamaan bidang yang melalui titik (3, -1, 2) dan paralel dengan bidang pada jawaban c
6. Tentukan jarak antara kedua bidang paralel (jawaban c dan d)
7. Tentukan jarak titik (3, -1, 2) ke bidang pada jawaban c
8. Tentukan volume *paralelpiped* yang dibentuk oleh vektor **u**, **v**, dan **w**.

**(Nilai: 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3)**

**Jawaban:**

1. $u+3v-w$ **=** (-3, 1, 2) + 3(4, 5, 1) – (1, 2, -4) = (-3, 1, 2) + (12, 15, 3) – (1, 2, -4)

 = (-3 + 12 – 1, 1 + 15 – 2, 2 + 3 + 4)

 = (8, 14, 9)

$\left‖u+3v-w\right‖$ = $\sqrt{8^{2}+ 14^{2}+ 9^{2}}$ = $\sqrt{64+196+81}$ = $\sqrt{341}$

$ w∙u$= (1)(-3) + (2)(1) + (-4)(2) = -3 + 2 – 8 = -9

$\left‖u+3v-w\right‖(w∙u)$ = -9$\sqrt{341}$ atau = -166.1956678

1. Tes $w∙u$ **= -**9 ≠ 0, oleh karena itu dapat disimpulkan {**u**, **v**, **w**} bukan himpunan ortogonal
2. Tentukan vektor normal bidang:

**n** = **v** x **w** = $\left|\begin{matrix}i&j&k\\4&5&1\\1&2&-4\end{matrix}\right|$ = **i** $\left|\begin{matrix}5&1\\2&-4\end{matrix}\right|$ – **j** $\left|\begin{matrix}4&1\\1&-4\end{matrix}\right|$ + **k** $\left|\begin{matrix}4&5\\1&2\end{matrix}\right|$ = -22**i** + 17**j** + 3**k**

Jadi, **n** = (-22, 17, 3)

Persamaan bidang dengan n = (-22, 17, 3) yang melalui titik (4, 5, 1) adalah:

a(x – x0) + b(y – y0) + c(z – z0) = 0

-22(x – 4) + 17(y – 5) + 3(z – 1) = 0

-22x + 88 + 17y – 85 + 3z – 3 = 0

-22x + 17y + 3z = 0

22x – 17y – 3z = 0

Jika melalui titik (1, 2, -4):

-22(x – 1) + 17(y – 2) + 3(z + 4) = 0

-22x + 22 + 17y – 34 + 3z + 12 = 0

-22x + 17y + 3z = 0

22x – 17y – 3z = 0

Hasilnya sama

1. Bidang yang paralel dengan bidang pada jawaban c memiliki normal yang sama, yaitu **n** = (-22, 17, 3), atau kelipatannya, dan melalui titik (3, -1, 2) adalah

a(x – x0) + b(y – y0) + c(z – z0) = 0

-22(x – 3) + 17(y + 1) + 3(z – 2) = 0

-22x + 66 + 17y + 17 + 3z – 6 = 0

-22x + 17y + 3z + 77 = 0

22x – 17y – 3z – 77 = 0

1. Jarak kedua bidang adalah (diketahui sebuah tiitk pada bidang d adalah (3, -1, 2), maka jarak titik itu ke bidang c (22x – 17y – 3z = 0) adalah

 $d=\frac{\left|ax\_{0}+by\_{0}+cz\_{0}+d\right|}{\sqrt{a^{2}+b^{2}+c^{2}}}$ = $\frac{\left|22\left(3\right)-17\left(-1\right)+\left(-3\right)\left(2\right)-0\right|}{\sqrt{22^{2}+(-17)^{2}+(-3)^{2}}}$ = $\frac{\left|66+17-6\right|}{\sqrt{484+289+9 }}$ = $\frac{77}{\sqrt{782}}$ = $\frac{77}{27.964}$ = 2.7535

1. Sama dengan jawaban c, yaitu 2.7535
2. Volume paralelpiped:

V = $\left|\begin{matrix}-3&1&2\\4&5&1\\1&2&-4\end{matrix}\right|$ = -3 $\left|\begin{matrix}5&1\\2&-4\end{matrix}\right|$ – 1 $\left|\begin{matrix}4&1\\1&-4\end{matrix}\right|$ + 2 $\left|\begin{matrix}4&5\\1&2\end{matrix}\right|$ = 66+ 17 + 6 = 79

1. Misalkan basis *B* ={**u1**,**u2**} dan basis *B’* = {**u1**’, **u2**’} untuk R2 dimana

**u**1 **=** $\left[\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right]$, **u**2 **=** $\left[\begin{matrix}4\\-1\end{matrix}\right]$, **u’**1 **=** $\left[\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right]$, **u’**2 **=** $\left[\begin{matrix}-1\\-1\end{matrix}\right]$

a). Tentukan matrik transisi P dari *B’* ke *B*

b). Tentukan matrik transisi P dari *B* ke *B’*

c). Hitunglah vektor koordinat [**w**]*B*, dimana **w** **=** $\left[\begin{matrix}3\\-5\end{matrix}\right]$

d). Hitunglan vektor koordinat [**w**]*B’*, menggunakan matrik transisi

 **(Nilai: 5 + 5 + 5 + 5)**

 **Jawaban:**

$\left(\begin{matrix}1&-1\\3&-1\end{matrix}\right) R2-R1$$\left(\begin{matrix}1&-1\\2&0\end{matrix}\right)R1/2$ *;* R2*/*(*-5*)

1. [ basis baru | basis lama ] =

$\left(\begin{matrix}1/2&-1/2\\-2/5&0\end{matrix}\right) R1-2R2$$\left(\begin{matrix}13/10&-1/2\\-2/5&0\end{matrix}\right) $

 Matriks transisi adalah PB’→B = $\left(\begin{matrix}13/10&-1/2\\-2/5&0\end{matrix}\right)$

$\left(\begin{matrix}2&4\\2&-1\end{matrix}\right) R2-3R1$$\left(\begin{matrix}2&4\\-4&-13\end{matrix}\right)R2/2$

1. [ basis baru | basis lama ] =

$\left(\begin{matrix}1&-1\\3&-1\end{matrix}\right) R2-R1$$\left(\begin{matrix}1&-1\\2&0\end{matrix}\right)R1/2$ *;* R2*/*(*-5*)

$\left(\begin{matrix}2&4\\-2&-13/2\end{matrix}\right) R1+R2$$\left(\begin{matrix}0&-5/2\\-2&-13/2\end{matrix}\right) $

 Matriks transisi adalah PB’→B = $\left(\begin{matrix}0&-5/2\\-2&-13/2\end{matrix}\right)$

1. (3, -5) = c1(2, 2) + c2(4, -1)

2c1 + 4c2 = 3

2c1 – c2 = -5 -

-----------------------

 5c2 = 8

 c2 = 8/5

 2c1 + 4c2 = 3

 2c1 + 4(8/5) = 3

 2c1 = 3 – 32/5

 c1 = (-17/5)/2 = -17/10

 Jadi, koordinatt **w** = (3, -5) pada basis B adalah (-17/10, 8/5)

1. $\left(\begin{matrix}0&-5/2\\-2&-13/2\end{matrix}\right) \left(\begin{matrix}-17/10\\8/5\end{matrix}\right)= \left(\begin{matrix}-4\\-7\end{matrix}\right)$
2. Diketahui himpunan vektor polinom di P2 sebagai berikut: S = {**p1** = 3 + x – 4x2, **p2** = 2 + 5x + 6x2, **p3** = 1 + 4x + 8x2}.
3. Tunjukkan bahwa p1, p2, dan p3 adalah basis untuk P2
4. Tentukan dimensi P2
5. Tentukan polinom **p** di P2 yang koordinatnya vektornya adalah (**p**)S = (–1, 3, 2)

 (**Nilai: 10 + 4 + 5)**

**Jawaban:**

1. **p1** = 3 + x – 4x2 → **p1** = (3, 1, -4)

 **p2** = 2 + 5x + 6x2 → **p2** = (2, 5, 6)

 **p3** = 1 + 4x + 8x2 → **p3** = (1, 4, 8)

 Apakah S = {**p1**, **p2**, **p3**} basis untuk P2? Syarat sebuah himpunan vektor menjadi basis adalah:

1. S bebas linier
2. S membangun P2

Penyelesaian:

(i) Harus ditunjukkan bahwa **p1**, **p2**, dan **p3** bebas linier sbb:

 k1(3, 1, -4) + k2(2, 5, 6) + k3(1, 4 , 8)= 0

 Diperoleh SPL homogen:

 3k1 + k2 - 4k3 = 0

 2k1 + 5k2 + 6k3 = 0

 k1 + 4k2  + 8k3 = 0

 Harus ditunjukkan bahwa solusi SPL adalah trivial yaitu k1 = 0, k2 = 0, k3 = 0

(ii) Harus ditunjukkan bahwa **p1**, **p2**, dan **p3** membangun P2 sbb:

Misalkan vektor sembarang **w** = (w1, w2, w3) di P2 dapat dinyatakan sebagai **w** = k1**p1** + k2**p2** + k3**p3**

(w1, w2, w3) = k1(3, 1, -4) + k2(2, 5, 6) + k3(1, 4 , 8)

 Diperoleh SPL:

 3k1 + k2 - 4k3 = w1

 2k1 + 5k2 + 6k3 = w2

 k1 + 4k2  + 8k3 = w3

 Harus ditunjukkan bahwa SPL di atas dapat dipecahkan.

 Untuk (i) dan (ii) kita cukup menunjukkan bahwa matriks

A = $\left[\begin{matrix}3&1&-4\\2&5&6\\1&4&8\end{matrix}\right]$

 → det(A) = 3(40 – 24) – (16 – 6) - 4(8 – 5) = 48 – 10 – 12 = 26

 mempunyai balikan (*invers*), yaitu det(A) ≠ 0. Karena det(A) = 26, maka matriks A tersebut

 dapat dibalikkan.

Oleh karena itu, SPL homogen:

 3k1 + k2 - 4k3 = 0

 2k1 + 5k2 + 6k3 = 0

 k1 + 4k2  + 8k3 = 0

 memiliki solusi trivial, dan SPL:

 3k1 + k2 - 4k3 = w1

 2k1 + 5k2 + 6k3 = w2

 k1 + 4k2  + 8k3 = w3

 dapat dipecahkan. Jadi, S = {**p1**, **p2**, **p3**} adalah basis untuk P2.

1. Dimensi = 3
2. **p** = (-1)**p1** + 3**p2** + 2**p3** = -(3 + x – 4x2) + 3(2 + 5x + 6x2) + 2(1 + 4x + 8x2)

 = -3 – x + 4x2 + 6 + 15x + 18x2 + 2 + 8x + 16x2

 = 5 + 22x + 38x2

1. Diberikan sebuah matriks A berukuran 4 x 5 sebagai beriku

 $A= \left[\begin{matrix}1&2&0&2&5\\-2&-5&1&-1&-8\\0&-3&3&4&1\\3&6&0&-7&2\end{matrix}\right]$

1. Tentukan basis untuk ruang baris, ruang kolom, dan ruang null untuk matriks A
2. Tentukan *rank* dan *nullity* matriks A

**(Nilai: 15 + 5)**

**Jawaban:**

**(a)**

 $ \left[\begin{matrix}1&2&0&2&5\\-2&-5&1&-1&-8\\0&-3&3&4&1\\3&6&0&-7&2\end{matrix}\right] R2+2R1;R3-3R1 \left[\begin{matrix}1&2&0&2&5\\0&-1&1&3&2\\0&-3&3&4&1\\0&0&0& -13&-13\end{matrix}\right]\left(-1\right)R2$

$$ \left[\begin{matrix}1&2&0&2&5\\0&1&-1&-3&-2\\0&-3&3&4&1\\0&0&0& -13&-13\end{matrix}\right] R3+3R2 \left[\begin{matrix}1&2&0&2&5\\0&1&-1&-3&-2\\0&0&0&-5&-5\\0&0&0& -13&-13\end{matrix}\right]R3/(-5) $$

 $ \left[\begin{matrix}1&2&0&2&5\\0&1&-1&-3&-2\\0&0&0&1&1\\0&0&0& -13&-13\end{matrix}\right]R4+13R3 \left[\begin{matrix}1&2&0&2&5\\0&1&-1&-3&-2\\0&0&0&1&1\\0&0&0& 0&0\end{matrix}\right]$

 Basis untuk ruang baris adalah semua baris matriks R yang mengandung 1 utama:

𝐫𝟏 = [1 2 0 2 5]

𝐫𝟐 = [0 1 -1 -3 −2]

𝐫𝟑 = [0 0 0 1 1]

Basis untuk ruang kolom adalah semua kolom dari matriks A yang berkoresponden dengan kolom matriks R yang

mengandung 1 utama:

c1 = $\left[\begin{matrix}1\\-2\\0\\3\end{matrix}\right]$ c2 = $\left[\begin{matrix}2\\-5\\-3\\6\end{matrix}\right]$ c3 = $\left[\begin{matrix}2\\-1\\4\\-7\end{matrix}\right]$

Basis untuk ruang null diperoleh dengan menyelesaian Ax = 0:

 $\left[\begin{matrix}1&2&0&2&5&0\\-2&-5&1&-1&-8&0\\0&-3&3&4&1&0\\3&6&0&-7&2&0\end{matrix}\right]$ ~ ...OBE...~ $\left[\begin{matrix}1&2&0&2&5&0\\0&1&-1&-3&-2&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0& 0&0&0\end{matrix}\right]$

Diperoleh persamaan sbb:

x1 + 2x2 + 2x4 + 5x5 = 0

 x2 – x3 – 3x4 – 2x5 = 0

 x4 + x5 = 0

x4 = -x5

x2 = x3 + 3x4 + 2x5 = x3 – 3x5 + 2x5 = x3 – x5

x1 = -2x2 – 2x4 – 5x5 = -2x2 + 2x5 – 5x5 = -2x2 – 3x5 = -2(x3 – x5) – 3x5 = -2x3 - x5

Misalkan x3 = s, x5 = t, s, t ∈ R

Maka:

x4 = -t

x2 = x3 – x5 = s – t

x1 = -2x3 – x5 = -2s – t

$ \left⌈\begin{matrix}x1\\x2\\x3\\x4\\x5\end{matrix}\right⌉= \left[\begin{matrix}-2s-t\\s-t\\s\\-t\\t\end{matrix}\right]$ = *s* $\left[\begin{matrix}-2\\1\\1\\0\\0\end{matrix}\right]$ + *t* $\left[\begin{matrix}-1\\-1\\0\\-1\\1\end{matrix}\right]$

Basis ruang null adalah $\left[\begin{matrix}-2\\1\\1\\0\\0\end{matrix}\right] $dan $\left[\begin{matrix}-1\\-1\\0\\-1\\1\end{matrix}\right]$

1. Rank(A) = dimensi ruang baris = dimensi ruang kolom = 3

Nullity(A) = dimensi ruang null = 2

Memenuhi kesamaan : Rank(A) + Nullity(A) = n

 3 + 2 = 5

1. Diketahui 𝑇 : 𝑃2 → 𝑅3, *P*2 adalah polinom derajat 2, yang dalam hal ini,

𝑇(𝑎 + 𝑏𝑥 + 𝑐𝑥2) = $\left(\begin{matrix}a+b\\a+c\\c\end{matrix}\right)$

(a) Apakah *T* merupakan transformasi linier? Buktikan!

(b) Tentukan *T*(2 + 3*x* + 4*x*2)

**(Nilai: 8 + 2)**

 Jawaban:

1. Jika T transformasi linier maka harus memenuhi T(**u** + **v**) = T(**u**) + T(**v**) dan T(k**u**) = kT(**u**)

Misalkan **u** = u1 + u2x + u3x2, **v** = v1 + v2x + v3x2

 T(**u** + **v**) = T(u1 + u2x + u3x2 + v1 + v2x + v3x2) =

 = T((u1 + v1) + (u2 + v2)x + (u3 + v3)x2)

 = $\left(\begin{matrix}\left(u1+v1\right)+(u2+v2)\\\left(u1+v1\right)+(u3+v3)\\(u3+v3)\end{matrix}\right)$

 =  $\left(\begin{matrix}\left(u1+u2\right)+(v1+v2)\\\left(u1+u3\right)+(v1+v3)\\(u3+v3)\end{matrix}\right)$

 = $\left(\begin{matrix}\left(u1+u2\right)\\\left(u1+u3\right)\\u3\end{matrix}\right)$ + $\left(\begin{matrix}(v1+v2)\\(v1+v3)\\v3\end{matrix}\right)$

 = T(**u**) + T(**v**)

 T(k**u**) = T(ku1 + ku2x + ku3x2) = $\left(\begin{matrix}\left(ku1+ku2\right)\\\left(ku1+ku3\right)\\ku3\end{matrix}\right)$ = k $\left(\begin{matrix}\left(u1+u2\right)\\\left(u1+u3\right)\\u3\end{matrix}\right)$ = kT(**u**)

 Jadi, T adalah transformasi linier

(b) *T*(2 + 3*x* + 4*x*2) = $\left(\begin{matrix}2+3\\2+4\\4\end{matrix}\right)$ = $\left(\begin{matrix}5\\6\\4\end{matrix}\right)$

6. Temukan matriks standar untuk operator T : R3→R3 yang pertama-tama memutar sebuah vektor

berlawanan arah jarum jam terhadap sumbu z melalui sudut θ, kemudian mencerminkan vektor yang

dihasilkan terhadap bidang yz, dan kemudian memproyeksikan vektor tersebut secara ortogonal ke

bidang xy.

 **(Nilai: 10)**

Jawaban:

