

Kuis ke-1 IF2123 Aljabar Linier dan Geometri (3 SKS) – Matriks, Sistem Persamaan Linier, Determinan  
 Dosen: Rila Mandala, Rinaldi M, Judhi Santoso/Arrival Dwi Sentosa  
 Selasa, 26 September 2024  
 Waktu: 50 menit

<p>1. Tentukanlah nilai k sehingga sistem persamaan linear di kanan ini mempunyai satu solusi, kemudian tentukan solusinya</p> <p>Jawaban:          Karena SPL ini mempunyai satu solusi atau <b>solusi tunggal</b>, maka kita tentukan terlebih dahulu solusi untuk x dan y dari Persamaan (1) dan (2), dilanjutkan dengan substitusi solusi ke dalam Persamaan (3).          Eliminasi Persamaan (1) dan (2) dengan menyamakan koefisien x. Persamaan (2) dikalikan 2 di kedua ruas.  <math>2x + 3y = 2</math>  <math>2x + 8y = 12</math>          ----- (-)  <math>-5y = -10 \rightarrow y = 2</math>          Substitusikan nilai y ke salah satu persamaan, dipilih Persamaan (1).  <math>2x + 3(2) = 2</math>  <math>2x = -4 \rightarrow x = -2</math>          Jadi, <b>solusi SPL di atas adalah (-2, 2)</b>.          Untuk mendapatkan nilai k, substitusikan kedua nilai x dan y ke dalam Persamaan (3).  <math>(-2, 2) \rightarrow 5(-2) + 2k = 2</math>  <math>2k = 12</math>          Jadi, <b>nilai k = 6</b></p> <p>(Catatan: cara penyelesaian lain juga dibenarkan)</p>	$2x + 3y = 2$ $x + 4y = 6$ $5x + ky = 2$ <p style="text-align: right;"><b>(Nilai: 15)</b></p>
<p>2. Tentukan nilai k sehingga sistem persamaan linear mempunyai tak hingga banyaknya penyelesaian dan tentukan solusinya.</p> <p>Jawaban:  <b>Cara 1:</b> Lakukan OBE pada matriks augmented:  <math display="block">\begin{pmatrix} 3 &amp; -1 &amp; 4 &amp; 5 \\ -6 &amp; 2 &amp; -8 &amp; k \end{pmatrix} R2 + 2R1 \begin{pmatrix} 3 &amp; -1 &amp; 4 &amp; 5 \\ 0 &amp; 0 &amp; 0 &amp; k + 10 \end{pmatrix}</math>          Agar SPL memiliki banyak solusi, maka  <math>k + 10 = 0 \rightarrow k = -10</math></p> <p>SPL menjadi:  <math>3x - y + 4z = 5</math>  <math>-6x + 2y - 8z = 10</math></p>	$3x - y + 4z = 5$ $-6x + 2y - 8z = k$ <p style="text-align: right;"><b>(Nilai: 15)</b></p>

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Persamaan pada baris pertama:

$$3x - y + 4z = 5 \rightarrow x = (5 + y - 4z)/3$$

Misalkan  $y = r$ ,  $z = s$ ,  $r$  dan  $s \in \mathbb{R}$ , maka

$$x = (5 + r - 4s)/3$$

$$y = r, r \in \mathbb{R}$$

$$z = s, s \in \mathbb{R}$$

**Cara 2:**

**Jika** terdapat **dua garis yang saling berimpit** dalam sistem koordinat ruang seperti yang berikut ini,

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ px + qy + rz = s \end{cases}$$

maka SPL tersebut mempunyai tak hingga banyaknya

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = \frac{d}{s}$$

penyelesaian (solusi) dengan syarat:

$$\begin{cases} 3x - y + 4z = 5 \\ -6x + 2y - 8z = k \end{cases}$$

$$\frac{3}{-6} = \frac{-1}{2} = \frac{4}{-8} = \frac{5}{k}$$

$$\frac{5}{k} = \frac{-1}{2} \rightarrow -k = 10$$

Jadi, nilai  $k = -10$ .

SPL di atas dapat ditulis selengkapnya

$$\text{menjadi } \begin{cases} 3x - y + 4z = 5 \\ -6x + 2y - 8z = -10 \end{cases}$$

Dari persamaan  $3x - y + 4z = 5$  diolah untuk mendapatkan tiga persamaan dengan subyek  $x$ ,  $y$ , dan  $z$ .

- $3x - y + 4z = 5 \rightarrow x = \frac{1}{3}(5 + y - 4z)$
- $3x - y + 4z = 5 \rightarrow y = 3x + 4z - 5$
- $3x - y + 4z = 5 \rightarrow z = \frac{1}{4}(5 - 3x + y)$

Setiap nilai  $x$  dan  $y$  yang berbeda, akan memperoleh nilai  $z$  yang berbeda, begitu pula sebaliknya. Jadi, SPL tersebut mempunyai solusi yang tak hingga banyaknya.

Catatan: cara penyelesaian lain juga dimungkinkan

3. Sebuah pabrik mainan memproduksi tiga jenis robot: Robot Alpha, Robot Beta, dan Robot Gamma. Setiap jenis robot membutuhkan komponen elektronik dalam jumlah tertentu. Selama tiga hari produksi, pabrik mencatat data berikut:

Hari Pertama:

- Memproduksi 10 unit Robot Alpha, 15 unit Robot Beta, dan 20 unit Robot Gamma.
- Menggunakan total 95 komponen elektronik.

**Pertanyaan:**

- a. Bentuklah sistem persamaan linier berdasarkan informasi di atas untuk menentukan jumlah komponen elektronik yang dibutuhkan per unit masing-masing robot.
- b. Gunakan metode eliminasi Gauss-Jordan untuk menyelesaikan sistem persamaan

Hari Kedua:

- Memproduksi 20 unit Robot Alpha, 10 unit Robot Beta, dan 15 unit Robot Gamma.
- Menggunakan total 95 komponen elektronik.

Hari Ketiga:

- Memproduksi 15 unit Robot Alpha, 20 unit Robot Beta, dan 10 unit Robot Gamma.
- Menggunakan total 80 komponen elektronik.

Jawaban:

- a. Membentuk Sistem Persamaan Linier

$x = \text{jumlah komponen elektronik per robot unit alpha}$   
 $y = \text{jumlah komponen elektronik per robot unit beta}$   
 $z = \text{jumlah komponen elektronik per robot unit gamma}$

1.  $10x + 15y + 20z = 95 \dots (1)$
2.  $20x + 10y + 15z = 95 \dots (2)$
3.  $15x + 20y + 10z = 80 \dots (3)$

- b. Menyelesaikan Sistem Persamaan dengan Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Lakukan OBE dan Metode Eliminasi Gauss-Jordan hingga terbentuk matriks akhir:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Nilai variable:

$$x = 2$$

$$y = 1$$

$$z = 3$$

Penyulihan Mundur

Persamaan (1):

$$10x + 15y + 20z = 95$$

$$10(2) + 15(1) + 20(3) = 20 + 15 + 60 = 95$$

Persamaan (2):

$$20x + 10y + 15z = 95$$

$$20(2) + 10(1) + 15(3) = 40 + 10 + 45 = 95$$

Persamaan (3):

$$15x + 20y + 10z = 80$$

$$15(2) + 20(1) + 10(3) = 30 + 20 + 30 = 80$$

Disimpulkan, komponen elektronik diperlukan:

- Komponen elektronik per unit Robot Alpha: 2

tersebut dan tentukan jumlah

komponen elektronik per unit dari Robot Alpha, Beta, dan Gamma.

- c. Jika pabrik berencana memproduksi 30 unit Robot Alpha, 25 unit Robot Beta, dan 20 unit Robot Gamma pada hari berikutnya, berapa banyak komponen elektronik yang diperlukan?

**(Nilai: 5 + 15 + 5)**

- Komponen elektronik per unit Robot Beta: 1
- Komponen elektronik per unit Robot Gamma: 3

c. Menghitung Kebutuhan Komponen Elektronik untuk Produksi Selanjutnya

Produksi yang direncanakan:

- 30 unit Robot Alpha
- 25 unit Robot Beta
- 20 unit Robot Gamma

$$\begin{aligned} \text{Total} &= 30x + 25y + 20z \\ &= 30(2) + 25(1) + 20(3) \\ &= 60 + 25 + 60 \\ &= 145 \end{aligned}$$

Jadi, pabrik membutuhkan 145 komponen elektronik untuk produksi hari berikutnya.

4. Diberikan sebuah matriks A dan b sebelah kanan ini.
- Hitung determinan matriks dengan ekspansi kofaktor.
  - Tentukan  $\text{adj}(A)$
  - Tentukan balikan (*invers*) A dengan menggunakan  $\text{adj}(A)$
  - Selesaikan SPL  $Ax = b$  dengan menggunakan balikan A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(Nilai: 25)

Jawaban:

$$(a) 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$2(-3 - 8) - 5(-3 - 4) + 5(-4 + 2) = -22 + 35 - 10 = 3$$

(b) Matriks cofaktor dari A:

$$\begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 7 & -2 \\ 5 & -4 & 2 \\ 15 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

$\text{Adj}(A) = \text{transpose matriks cofactor}$

$$= \begin{bmatrix} -11 & 5 & 15 \\ 7 & -4 & -9 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(c) A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -11 & 5 & 15 \\ 7 & -4 & -9 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11/3 & 5/3 & 5 \\ 7/3 & -4/3 & -3 \\ -2/3 & 2/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(d) X = A^{-1} b = \begin{bmatrix} -11/3 & 5/3 & 5 \\ 7/3 & -4/3 & -3 \\ -2/3 & 2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32/3 \\ 19/3 \\ -5/3 \end{bmatrix}$$

5. Diberikan matriks A di sebelah kanan ini. Jika  $\det(A) = -7$ , hitunglah:

(a)  $\det(3A)$  (b)  $\det(2A^{-1})$  (c)  $\det((2A)^{-1})$  (d)  $\begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$

Jawaban:

- (a) -189
- (b) -8/7
- (c) -1/56
- (d) 7

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

(Nilai: 20)

-----  
 Kerjakan pada bagian ksoong di bawah ini dan halaman dibaliknya, jika kurang pakai kertas sendiri