

Seri bahan kuliah Algeo #11 – Update 2024

Vektor di Ruang Euclidean **(bagian 1)**

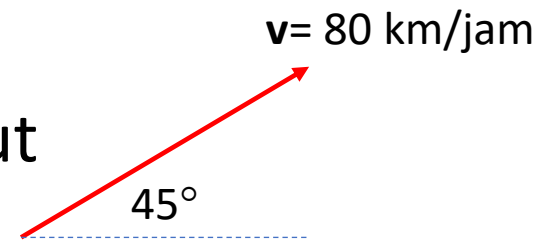
Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Definisi Vektor

- Kuantitas fisik dapat direpresentasikan dalam dua jenis: skalar dan vektor
- Skalar: nilai numerik yang menyatakan besaran kuantitas fisik tersebut
Contoh: temperatur 15° C, laju kendaraan 75 km/jam, panjang 2,5 m
- Vektor: kuantitas fisik yang memiliki besar dan arah
Contoh: kecepatan (\mathbf{v}) mobil 80 km/jam ke arah timur laut



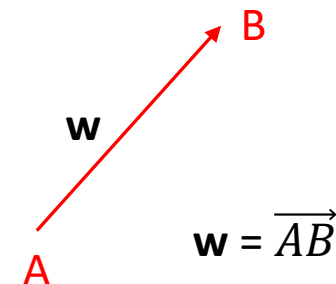
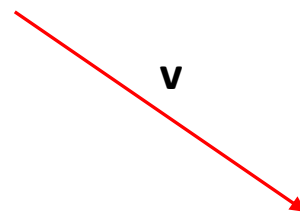
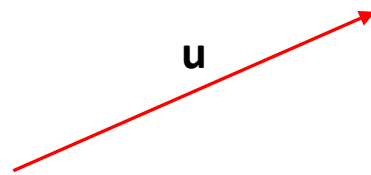
Notasi vektor

- Vektor dilambangkan dengan huruf-huruf kecil (dicetak tebal) atau memakai tanda panah (jika berupa tulisan tangan)

Contoh, **u**, **v**, **w**, ... atau \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} , ...

a, **b**, **c**, ...

- Secara geometri, vektor di ruang dwimatra (2D) dinyatakan sebagai garis berarah

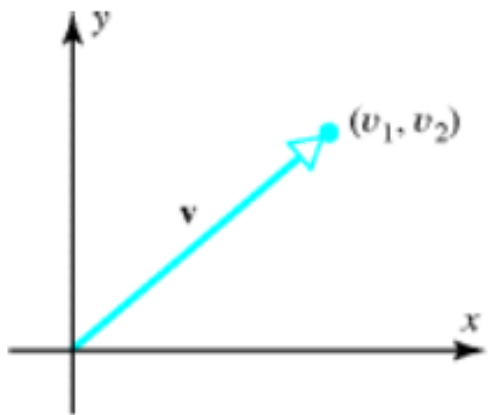


Ruang Vektor

- Ruang vektor (*vector space*): ruang tempat vektor didefinisikan
- Disebut juga ruang Euclidean
- \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^n

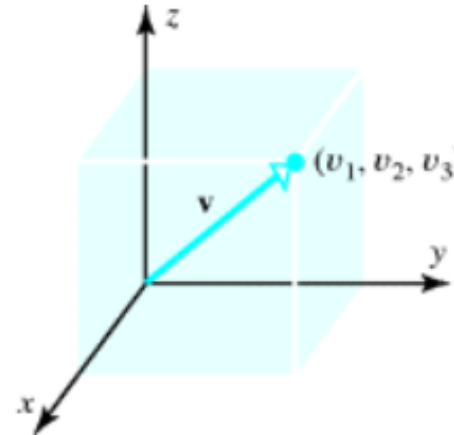
Vektor di \mathbb{R}^2

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \text{ atau } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$



Vektor di \mathbb{R}^3

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \text{ atau } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

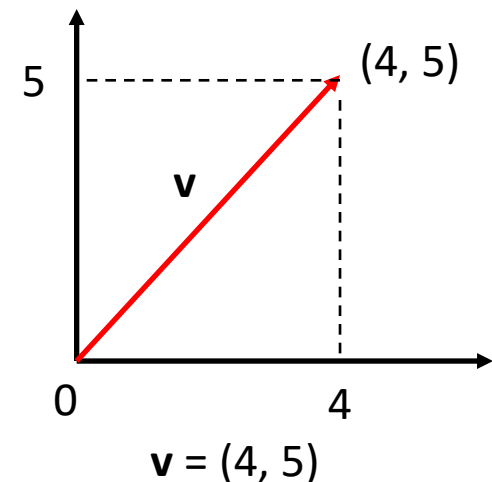


Vektor di \mathbb{R}^n :

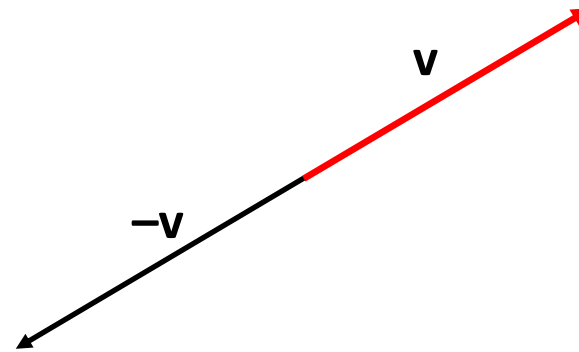
$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \text{ atau } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

(tidak ada gambaran geometri vektor di \mathbb{R}^n)

- Semua vektor yang ditulis sebagai $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, atau $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ berawal dari **titik asal** O .
- Titik asal vektor di \mathbb{R}^2 adalah $(0, 0)$
- Titik asal vektor di \mathbb{R}^3 adalah $(0, 0, 0)$
- Titik asal vektor di \mathbb{R}^n adalah $(0, 0, \dots, 0)$



- Vektor nol adalah vektor yang semua komponennya 0
 - Vektor nol dilambangkan dengan $\mathbf{0}$
 - Vektor 0 di \mathbb{R}^2 : $\mathbf{0} = (0, 0)$
 - Vektor 0 di \mathbb{R}^3 : $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$
 - Vektor 0 di \mathbb{R}^n : $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$
- Negatif dari vektor \mathbf{v} dilambangkan dengan $-\mathbf{v}$



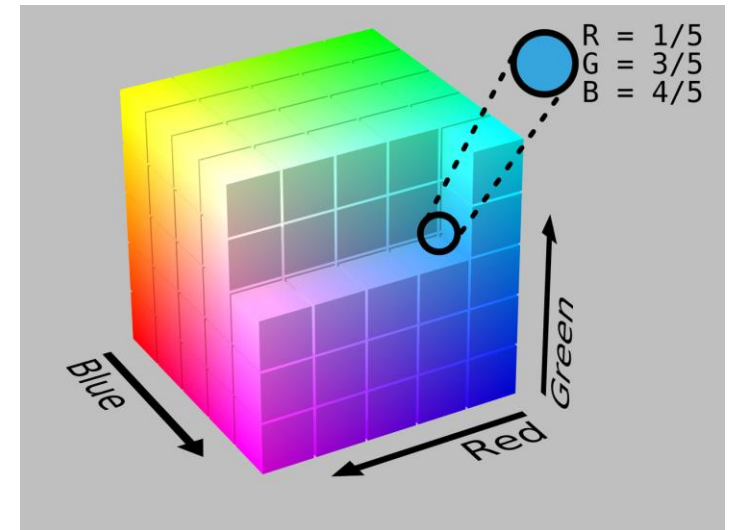
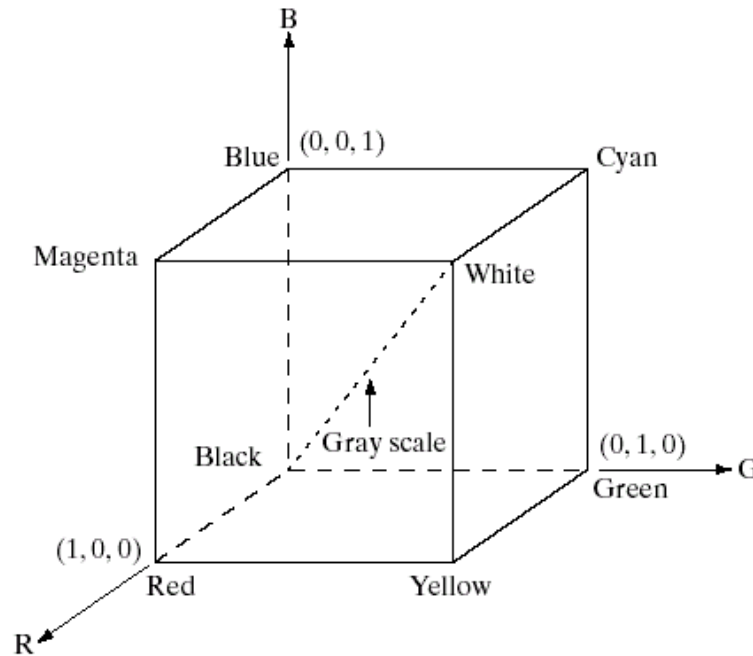
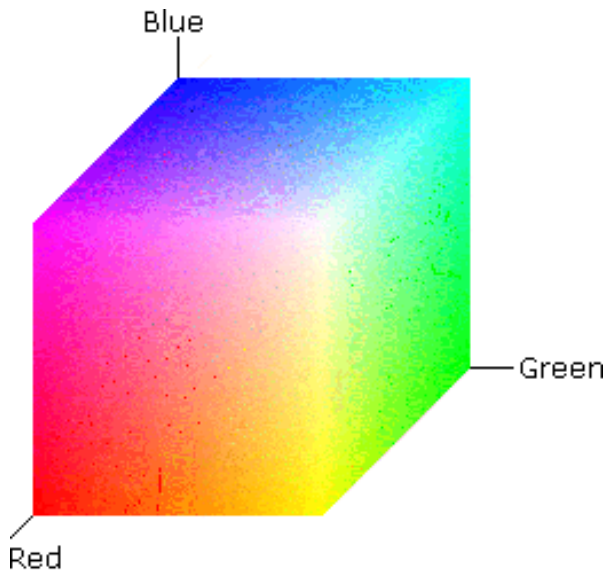
Contoh-contoh vector dan ruang vektor:

(i) $\mathbf{u} = (4, 5) \rightarrow$ vektor di \mathbb{R}^2

(ii) $\mathbf{v} = (-2, 3, 10) \rightarrow$ vektor di \mathbb{R}^3

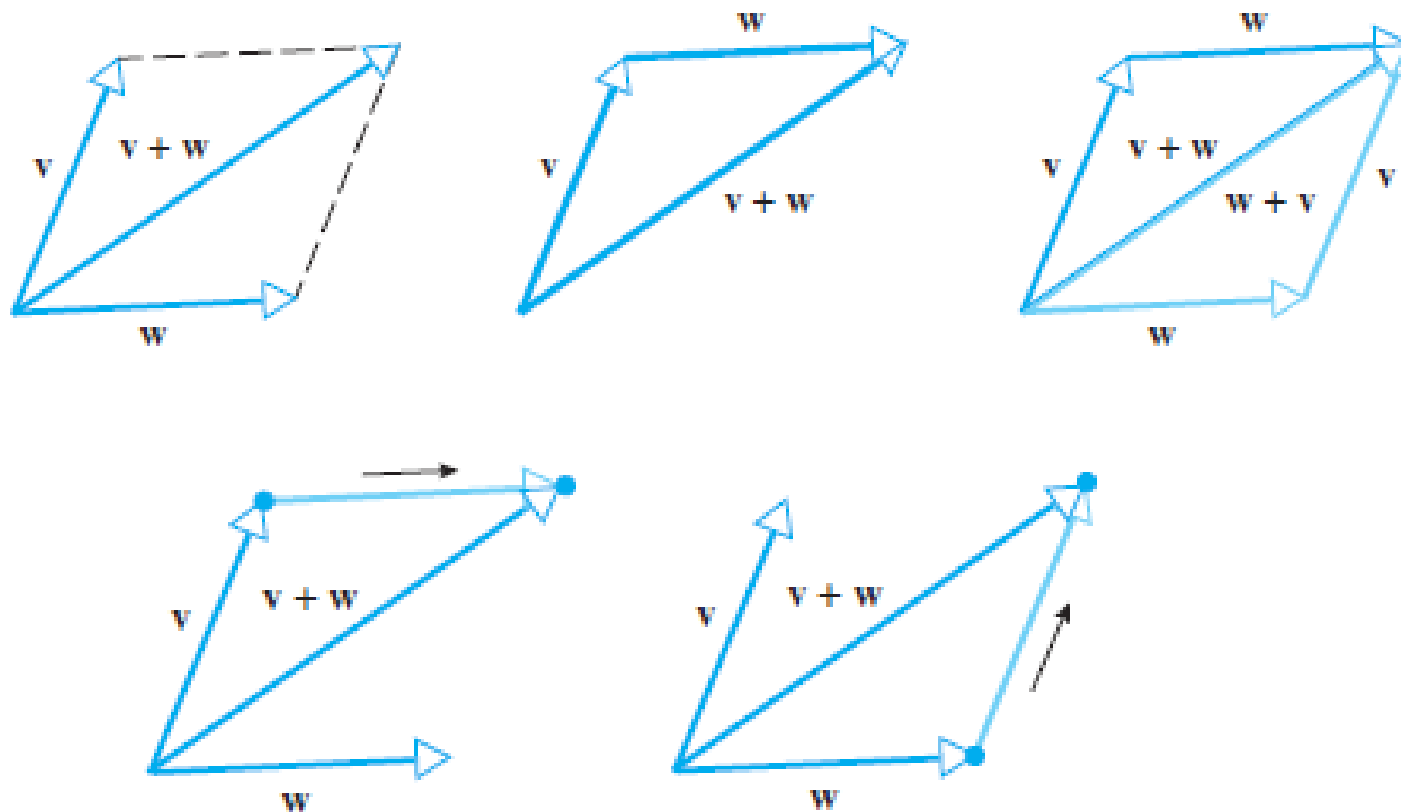
(iii) $\mathbf{w} = (1, -5, 0, 7, 8) \rightarrow$ vector di \mathbb{R}^5

(iv) $\mathbf{c} = (r, g, b) \rightarrow$ warna di dalam ruang warna RGB (*red-green-blue*)



Penjumlahan dua vektor

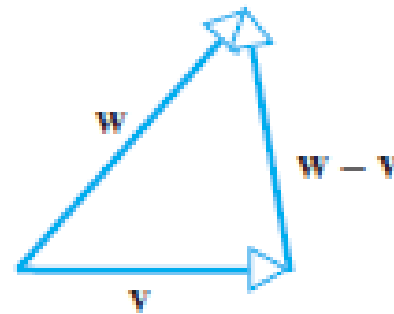
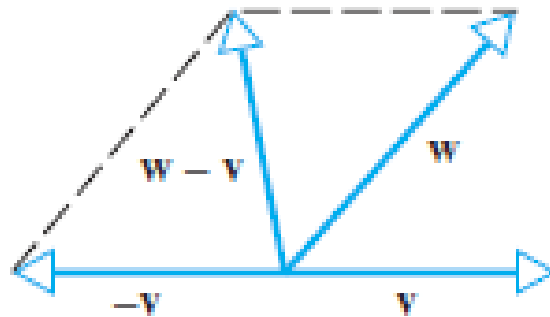
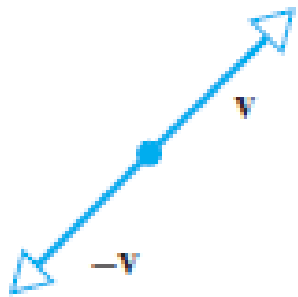
- Menggunakan kaidah parallelogram atau kaidah segitiga



- Jika $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$
maka $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n)$
- **Contoh 1:** Misalkan $\mathbf{v} = (3, -1, 4)$ dan $\mathbf{w} = (4, 0, 8)$ maka
 $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (3 + 4, -1 + 0, 4 + 8) = (7, -1, 12)$

Pengurangan dua vektor

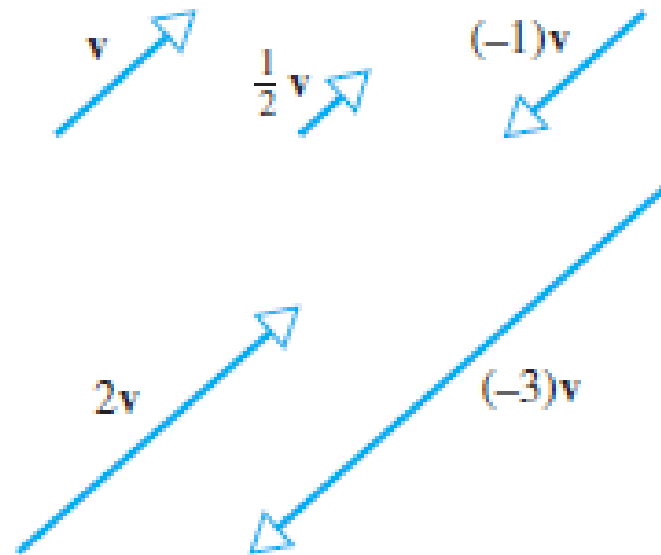
$$\mathbf{w} - \mathbf{v} = \mathbf{w} + (-\mathbf{v})$$



- Jika $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$
maka $\mathbf{v} - \mathbf{w} = (v_1 - w_1, v_2 - w_2, \dots, v_n - w_n)$
- **Contoh 2:** Misalkan $\mathbf{v} = (3, -1, 4)$ dan $\mathbf{w} = (4, 0, 8)$ maka
 $\mathbf{v} - \mathbf{w} = (3 - 4, -1 - 0, 4 - 8) = (-1, -1, -4)$

Perkalian vektor dengan skalar

$k\mathbf{v}$ = vektor yang panjangnya $|k|$ kali Panjang \mathbf{v}

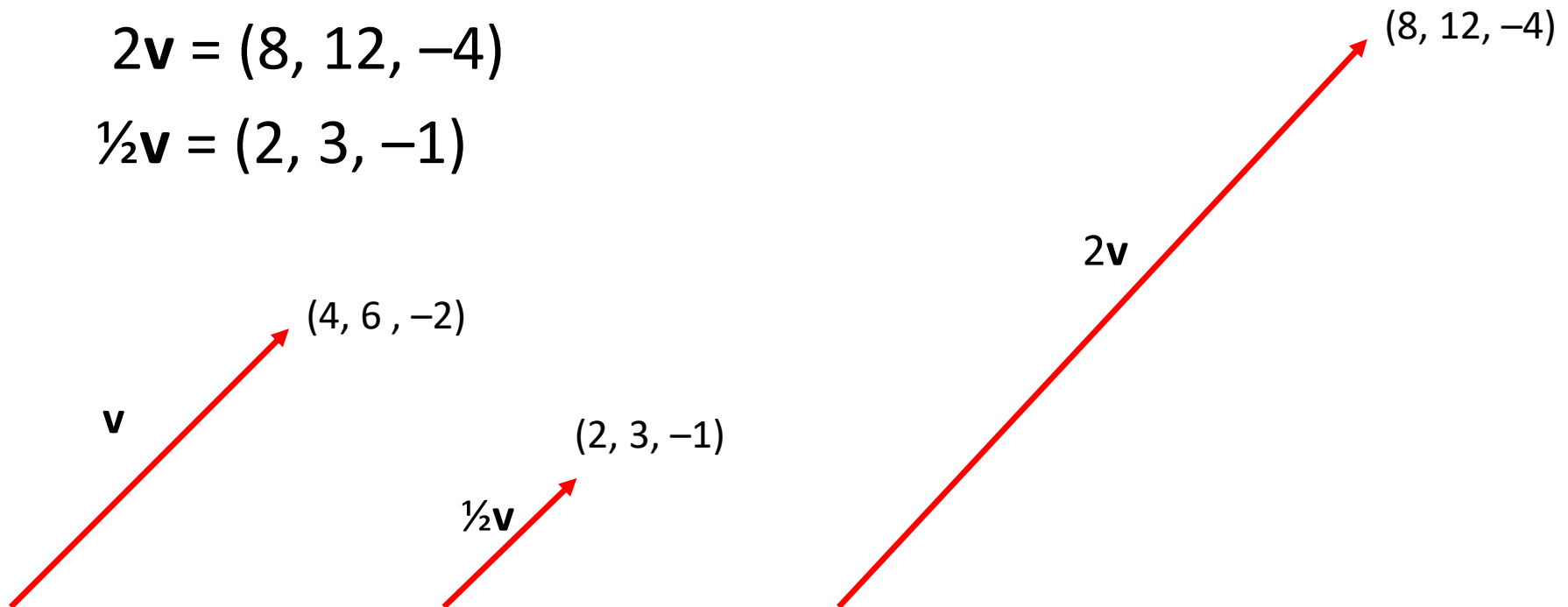


- Jika $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ maka $k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, \dots, kv_n)$

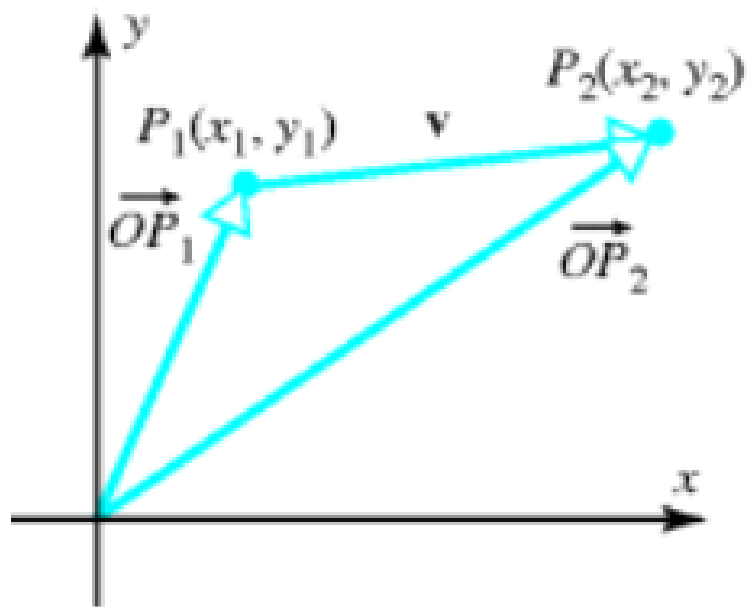
- **Contoh 3:** Misalkan $\mathbf{v} = (4, 6, -2)$ maka

$$2\mathbf{v} = (8, 12, -4)$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{v} = (2, 3, -1)$$



Vektor yang tidak berawal dari titik asal



Di \mathbb{R}^2 : Misalkan $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2)$, maka

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} \\ &= (x_2, y_2) - (x_1, y_1) \\ &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1)\end{aligned}$$

Di \mathbb{R}^3 : Misalkan $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$, maka

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Contoh 4: Misalkan $P_1(2, -1, 4)$ dan $P_2(7, 5, -8)$, maka

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (7 - 2, 5 - (-1), -8 - 4) = (5, 6, -12)$$

Norma sebuah vektor

- Panjang (atau *magnitude*) sebuah vektor \mathbf{v} dinamakan **norma** (*norm*) \mathbf{v} .
- Norma vektor \mathbf{v} dilambangkan dengan $\|\mathbf{v}\|$.
- Norma sebuah vektor dinamakan juga **norma Euclidean**.

- Norma vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ di \mathbb{R}^2 adalah $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

- Norma vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ di \mathbb{R}^3 adalah $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

- Norma vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ di \mathbb{R}^n adalah $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$

- Jika $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2)$ adalah dua titik di R^2 maka jarak (d) kedua titik tersebut adalah norma vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$d = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



- Jika $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$ adalah dua titik di R^3 maka jarak (d) kedua titik tersebut adalah norma vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$d = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ adalah dua titik di R^n maka jarak (d) kedua titik tersebut adalah $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$$

Contoh 5:

(i) Misalkan $\mathbf{v} = (6, -2, 3)$, maka norma vektor \mathbf{v} adalah

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7$$

(ii) Jika $P_1(2, -1, -5)$ dan $P_2(4, -3, 1)$ maka jarak kedua titik adalah

$$\begin{aligned} d &= \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(4 - 2)^2 + (-3 - (-1))^2 + (1 - (-5))^2} \\ &= \sqrt{4 + 4 + 36} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11} \end{aligned}$$

(iii) Misalkan $\mathbf{u} = (1, 3, -2, 7)$ dan $\mathbf{v} = (0, 7, 2, 2)$ adalah dua titik di \mathbb{R}^4 maka jarak antara \mathbf{u} dan \mathbf{v} adalah:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(1 - 0)^2 + (3 - 7)^2 + (-2 - 2)^2 + (7 - 2)^2} = \sqrt{58}$$

Latihan (Kuis 2022)

Diketahui tiga buah vektor $\mathbf{u} = (-2, -1, 4, 5)$, $\mathbf{v} = (3, 1, -5, 7)$, dan $\mathbf{w} = (-6, 2, 1, 1)$.

Hitung:

a) $\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$

b) $\|-\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|\mathbf{w}\|$

c) $\|3\mathbf{u}\| - \|5\mathbf{v}\| - \|-\mathbf{w}\|$

Jawaban:

a) $3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w} = 3(-2, -1, 4, 5) - 5(3, 1, -5, 7) + (-6, 2, 1, 1)$
 $= (-6, -3, 12, 15) - (15, 5, -25, 35) + (-6, 2, 1, 1) = (-27, -6, 38, -19)$

$$\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \sqrt{(-27)^2 + (-6)^2 + (38)^2 + (-19)^2} = \sqrt{2570} = 50,69$$

$$\text{b) } \mathbf{u} - \mathbf{v} = (-5, -2, 9, -2)$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{114}$$

$$-\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|\mathbf{w} = -\sqrt{114} (-6, 2, 1, 1) = (6\sqrt{114}, -2\sqrt{114}, \sqrt{114}, \sqrt{114})$$

$$\|-\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|\mathbf{w}\| = \sqrt{(6\sqrt{114})^2 + (-2\sqrt{114})^2 + (\sqrt{114})^2 + (\sqrt{114})^2}$$

$$= \sqrt{4104 + 456 + 114 + 114} = \sqrt{4788} = 69,196$$

$$\text{c) } 3\mathbf{u} = 3(-2, -1, 4, 5) = (-6, -3, 12, 15), \quad \|3\mathbf{u}\| = 3\sqrt{46}$$

$$5\mathbf{v} = 5(3, 1, -5, 7) = (15, 5, -25, 35), \quad \|5\mathbf{v}\| = 10\sqrt{21}$$

$$-\mathbf{w} = -(-6, 2, 1, 1) = (6, -2, -1, -1), \quad \|-\mathbf{w}\| = \sqrt{42}$$

$$\|3\mathbf{u}\| - \|5\mathbf{v}\| - \|-\mathbf{w}\| = 3\sqrt{46} - 10\sqrt{21} - \sqrt{42} = -31,96$$

Jarak Euclidean (*Euclidean distance*)

- Jarak dua vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ di \mathbb{R}^n :

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$$

sering dinamakan jarak Euclidean.

- Jarak Euclidean berguna untuk menentukan seberapa dekat (atau seberapa mirip) sebuah objek dengan objek lain (*object recognition, face recognition, dsb*).
- Misalkan terdapat sekumpulan objek 1, 2, ..., m. Setiap objek direpresentasikan sebagai vektor fitur $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m$. Setiap vektor memiliki n komponen.
- Untuk menentukan vektor $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m$ mana yang paling mirip dengan vektor \mathbf{z} , maka hitung jarak \mathbf{z} ke setiap vektor $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m$. Pilih jarak yang paling minimum, itulah vektor \mathbf{w}_j yang paling mirip dengan vektor \mathbf{z} , yang berarti objek yang paling mirip dengan objek \mathbf{z} .

Identification

Face DB

Probe image

$$\mathbf{w}_1 = (w_{11}, w_{12}, \dots, w_{1n})$$

$$\mathbf{w}_2 = (w_{21}, w_{22}, \dots, w_{2n})$$

$$\mathbf{w}_3 = (w_{31}, w_{32}, \dots, w_{3n})$$



d

$$\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$$

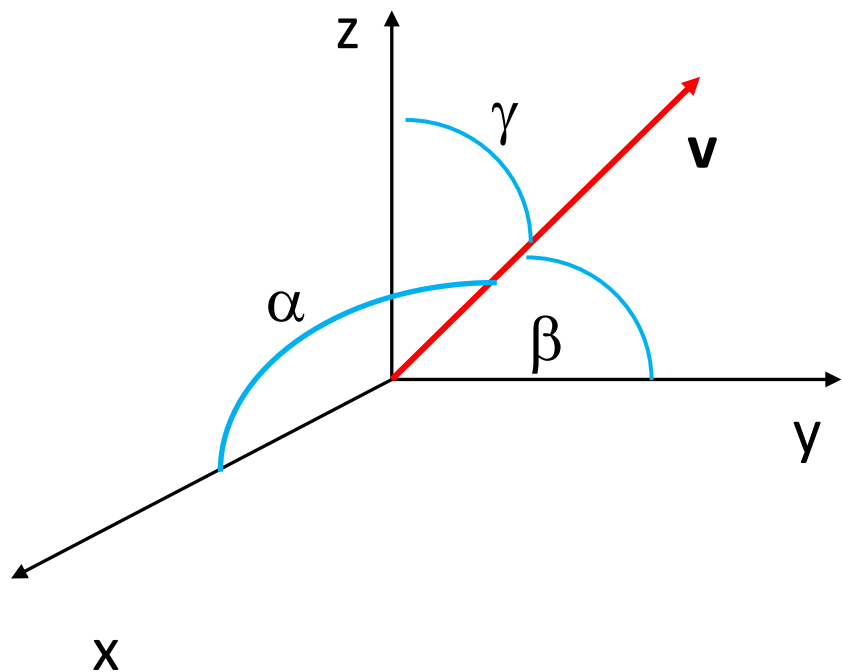
dsb



Who is this person?

Arah sebuah vektor

- Misalkan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ adalah vektor di \mathbb{R}^3 maka arah vektor \mathbf{v} adalah



$$\cos \alpha = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}$$

$$\cos \beta = \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}$$

$$\cos \gamma = \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|}$$

Contoh 6: Misalkan $\mathbf{v} = (6, -2, 3)$, maka norma vektor \mathbf{v} adalah

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7$$

Sudut \mathbf{v} terhadap sumbu-x adalah: $\cos \alpha = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{6}{7} \rightarrow \alpha = 31^\circ$

Sudut \mathbf{v} terhadap sumbu-y adalah: $\cos \beta = \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{-2}{7} \rightarrow \beta = 106.6^\circ$

Sudut \mathbf{v} terhadap sumbu-z adalah: $\cos \gamma = \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{7} \rightarrow \gamma = 64.62^\circ$

Sifat-sifat aljabar vektor

THEOREM 3.1.1 *If \mathbf{u} , \mathbf{v} , and \mathbf{w} are vectors in R^n , and if k and m are scalars, then:*

(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

(c) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

(d) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

(e) $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$

(f) $(k + m)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + m\mathbf{u}$

(g) $k(m\mathbf{u}) = (km)\mathbf{u}$

(h) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Kombinasi linier vektor

- Sebuah vektor dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor lain.

Contoh: $\mathbf{u} = 3\mathbf{v} + 2\mathbf{w} - 5\mathbf{x}$; \mathbf{v} , \mathbf{w} , dan \mathbf{x} adalah vektor-vektor di \mathbb{R}^3

- Secara umum, jika \mathbf{w} adalah vektor di \mathbb{R}^n , maka \mathbf{w} dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ jika \mathbf{w} dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_r\mathbf{v}_r$$

yang dalam hal ini k_1, k_2, \dots, k_r adalah skalar.

Contoh 7: Tentukan semua k_1 , k_2 , dan k_3 sehingga

$$k_1(1, 2, 3) + k_2(2, -3, 1) + k_3(3, 2, -1) = (6, 14, -2)$$

Penyelesaian:

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Diperoleh sistem persamaan linier (SPL):

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 6$$

$$2k_1 - 3k_2 + 2k_3 = 14$$

$$3k_1 + k_2 - k_3 = -2$$

Selesaikan SPL di atas dengan metode eliminasi Gauss, diperoleh:

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = 3$$

Vektor satuan

- Vektor satuan (*unit vector*) adalah vektor dengan panjang = 1
- Dilambangkan dengan \mathbf{u}
- Jika \mathbf{v} adalah vektor di \mathbb{R}^n dan $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ maka $\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v}$ atau $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$
- Vektor \mathbf{u} memiliki arah yang sama dengan \mathbf{v}
- Proses “membagi” sebuah vektor \mathbf{v} dengan panjangnya dinamakan **menormalisasi vektor**.
(sebenarnya bukan membagi, karena vektor tidak bisa dibagi)

Contoh 8: Misalkan $\mathbf{v} = (6, -2, 3)$, maka norma vektor \mathbf{v} adalah

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7 \text{ dan vektor satuannya:}$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{7} (6, -2, 3) = \left(\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)$$

Periksa bahwa panjang \mathbf{u} adalah satu,

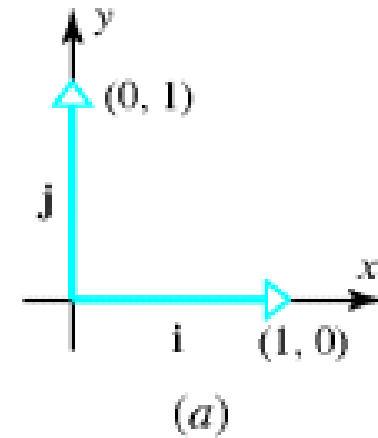
$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(-\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{36}{49} + \frac{4}{49} + \frac{9}{49}}$$

$$= \sqrt{\frac{49}{49}} = 1$$

Vektor satuan standard

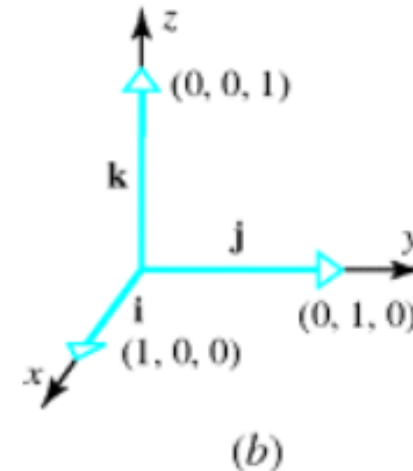
- Vektor satuan standard di \mathbb{R}^2 adalah \mathbf{i} dan \mathbf{j} :
 $\mathbf{i} = (1, 0)$ dan $\mathbf{j} = (0, 1)$



- Setiap vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ di \mathbb{R}^2 dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier
 $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$

- Vektor satuan standard di \mathbb{R}^3 adalah \mathbf{i} , \mathbf{j} , dan \mathbf{k} :
 $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, dan $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$,

- Setiap vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ di \mathbb{R}^3 dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$



- Vektor satuan standard di \mathbb{R}^n adalah $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$,
 $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots$, dan $\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$,
- Setiap vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ di \mathbb{R}^n dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \dots + v_n\mathbf{e}_n$

Contoh 9:

(i) $\mathbf{v} = (8, -4) = 8\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

(ii) $\mathbf{v} = (6, -2, 3) = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

(ii) $\mathbf{v} = (4, 6, 10, -1) = 4\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 + 10\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4$

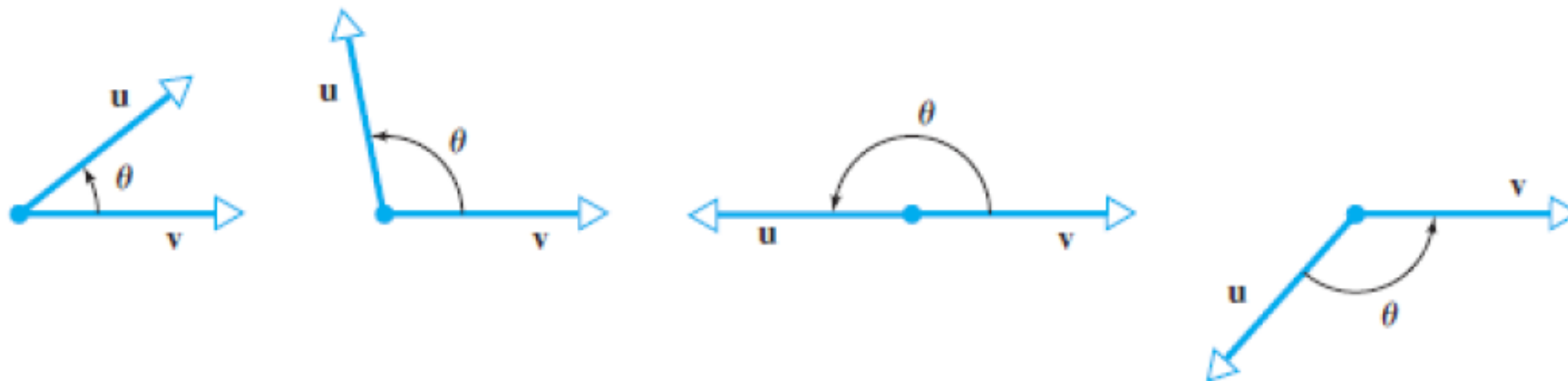
Perkalian titik (*dot product*)

- Jika \mathbf{u} dan \mathbf{v} adalah vektor tidak nol di \mathbb{R}^2 atau \mathbb{R}^3 , maka perkalian titik (*dot product*), atau disebut juga *Euclidean inner product*, \mathbf{u} dan \mathbf{v} adalah

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$$

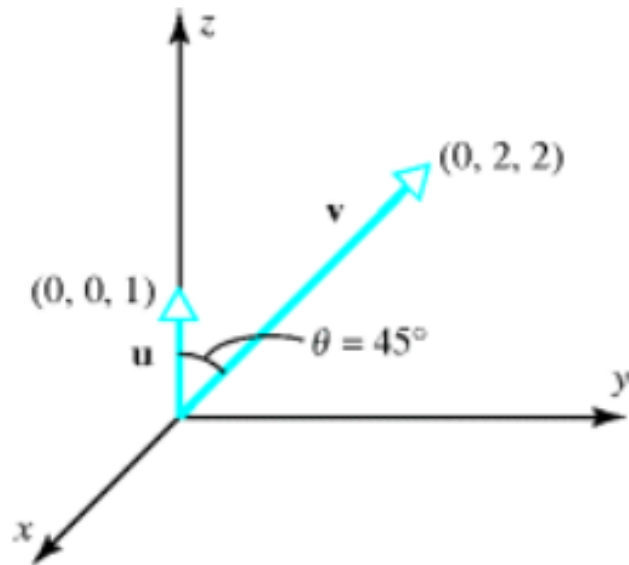
yang dalam hal ini θ adalah sudut yang dibentuk oleh \mathbf{u} dan \mathbf{v} .

- Jika $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ atau $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, maka $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$



Contoh 10: Misalkan $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$ dan $\mathbf{v} = (0, 2, 2)$, sudut yang dibentuk oleh \mathbf{u} dan \mathbf{v} dapat ditentukan dari gambar adalah 45° .

Maka dapat dihitung,



$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta \\ &= (\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2})(\sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2}) \cos 45^\circ \\ &= (\sqrt{1})(\sqrt{8}) \frac{1}{2} \sqrt{2} \\ &= \frac{\sqrt{16}}{2} \\ &= 2\end{aligned}$$

- Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ adalah dua vektor di \mathbb{R}^3 maka dapat dibuktikan (bukti tidak diperlihatkan di sini) bahwa

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

- Secara umum, jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ adalah dua buah vektor di \mathbb{R}^n maka

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$$

Contoh 11: Tinjau kembali Contoh 4, $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$ dan $\mathbf{v} = (0, 2, 2)$, maka

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (0)(0) + (0)(2) + (1)(2) = 0 + 0 + 2 = 2$$

sama dengan hasil pada Contoh 4.

Contoh 12: Misalkan $\mathbf{u} = (-1, 3, 5, 7)$ dan $\mathbf{v} = (-3, -4, 1, 0)$, maka

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1)(-3) + (3)(-4) + (5)(1) + (7)(0)$$

$$= 3 - 12 + 5 + 0$$

$$= -4$$

- Dari rumus perkalian titik $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$ dapat ditulis menjadi

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

dan karena $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$, maka

$$\cos \theta = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

Contoh 13: Carilah sudut antara vektor $\mathbf{u} = (2, -1, 1)$ dan $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \\ &= \frac{(2)(1) + (-1)(1) + (1)(2)}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2} \cdot \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (2)^2}} \\ &= \frac{2 - 1 + 2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} \\ &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ \theta &= \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ\end{aligned}$$

Sifat-sifat perkalian titik

THEOREM 3.2.2 *If \mathbf{u} , \mathbf{v} , and \mathbf{w} are vectors in R^n , and if k is a scalar, then:*

- (a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ [Symmetry property]
- (b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ [Distributive property]
- (c) $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$ [Homogeneity property]
- (d) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ and $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ if and only if $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ [Positivity property]

THEOREM 3.2.3 *If \mathbf{u} , \mathbf{v} , and \mathbf{w} are vectors in R^n , and if k is a scalar, then:*

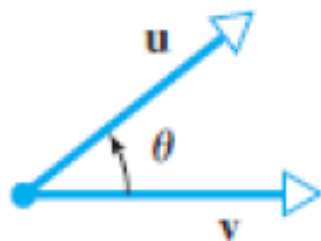
- (a) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{0} = 0$
- (b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
- (c) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
- (d) $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
- (e) $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})$

Teorema: Misalkan \mathbf{u} dan \mathbf{v} adalah vector-vector di \mathbb{R}^2 atau \mathbb{R}^3 . Kondisi di bawah ini berlaku

(1) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$ dan $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{1/2}$

(2) Jika \mathbf{u} dan \mathbf{v} adalah vektor tidak-nol dan θ adalah sudut antara kedua vector, maka

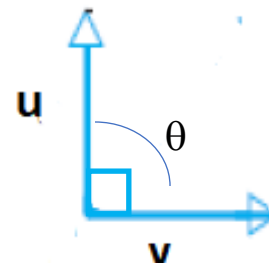
- θ adalah sudut lancip ($0 < \theta < 90^\circ$) jika dan hanya jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$
- θ adalah sudut tumpul ($90 < \theta < 180^\circ$) jika dan hanya jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$
- $\theta = 90^\circ$ jika dan hanya jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ($\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ atau ortogonal)



sudut lancip



sudut tumpul



ortogonal

Contoh 14:

(i) Misalkan $\mathbf{u} = (6, 3, 3)$ dan $\mathbf{v} = (4, 0, -6)$, maka

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (6)(4) + (3)(0) + (3)(-6) \\ &= 24 + 0 - 18 \\ &= 6 > 0\end{aligned}$$

Jadi, \mathbf{u} dan \mathbf{v} membentuk sudut lancip

(ii) Misalkan $\mathbf{u} = (4, 1, 6)$ dan $\mathbf{v} = (-3, 0, 2)$, maka

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (4)(-3) + (1)(0) + (6)(2) \\ &= -12 + 0 + 12 \\ &= 0\end{aligned}$$

Jadi, \mathbf{u} dan \mathbf{v} saling tegak lurus (ortogonal)

Ketidaksamaan Cauchy-Schwarz

THEOREM 3.2.4 Cauchy-Schwarz Inequality

If $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ and $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ are vectors in R^n , then

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \quad (22)$$

or in terms of components

$$|u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n| \leq (u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)^{1/2} (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2)^{1/2} \quad (23)$$



Hermann Amandus Schwarz (1843-1921)



Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1804-1889)

Dot Products and Matrices

Table 1

Form	Dot Product	Example
\mathbf{u} a column matrix and \mathbf{v} a column matrix	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{u}$	$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{u}^T \mathbf{v} = [1 \quad -3 \quad 5] \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = -7$ $\mathbf{v}^T \mathbf{u} = [5 \quad 4 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = -7$
\mathbf{u} a row matrix and \mathbf{v} a column matrix	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{u}^T$	$\mathbf{u} = [1 \quad -3 \quad 5]$ $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{u}\mathbf{v} = [1 \quad -3 \quad 5] \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = -7$ $\mathbf{v}^T \mathbf{u}^T = [5 \quad 4 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = -7$
\mathbf{u} a column matrix and \mathbf{v} a row matrix	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}\mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{v}^T$	$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\mathbf{v} = [5 \quad 4 \quad 0]$ $\mathbf{v}\mathbf{u} = [5 \quad 4 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = -7$ $\mathbf{u}^T \mathbf{v}^T = [1 \quad -3 \quad 5] \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = -7$
\mathbf{u} a row matrix and \mathbf{v} a row matrix	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v}^T = \mathbf{v}\mathbf{u}^T$	$\mathbf{u} = [1 \quad -3 \quad 5]$ $\mathbf{v} = [5 \quad 4 \quad 0]$ $\mathbf{u}\mathbf{v}^T = [1 \quad -3 \quad 5] \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = -7$ $\mathbf{v}\mathbf{u}^T = [5 \quad 4 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = -7$

Bersambung ke bagian 2