

Jawaban Ujian Akhir Semester IF2123 Aljabar Linier dan Geometri  
Semester I tahun akademik 2022/2023  
Kamis, 7 Desember 2023  
Waktu: 120 menit

*Berdoalah terlebih dahulu sebelum ujian dimulai.*

**A. Pilihan Ganda**

**Tuliskan jawaban soal pilihan ganda di bawah ini pada lembar jawabanmu, hanya berupa huruf jawaban saja (A, B, C, D, E, dst). Setiap soal bernilai 4.**

1. Penemu dari aljabar quaternion adalah
  - A. Sir William Rowan Dijkstra
  - B. Sir William Rowan Atkinson
  - C. Sir William Ronald Dijkstra
  - D. Sir William Ronald Hamilton
  - E. Sir William Ruben Hamilton
  - F. Tidak ada jawaban yang benar

**Kunci jawaban: F**

2. Aljabar quaternion sesungguhnya adalah
  - A. Bukan bilangan kompleks
  - B. Bilangan kompleks duplet
  - C. Bilangan kompleks triplet
  - D. Bilangan kompleks tuplet
  - E. Bilangan kompleks quadruplet
  - F. Bilangan kompleks quintuplet
  - G. Semua jawaban salah.

**Kunci jawaban: E**

3. Dalam aljabar quaternion jika  $q$  adalah quaternion maka tanpa syarat apapun terkait nilai  $q$ , maka pastilah berlaku  $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$ . Pernyataan tersebut adalah
  - A. Benar
  - B. Salah

**Kunci jawaban: B**

4. Jika  $z_1 = (2-3i)/(1+i)$  dan  $z_2 = (5-2i)/(3+4i)$ , maka nilai dari  $z_1 + z_2$  adalah :
  - A.  $(7 - 5i)/(4 + 5i)$
  - B.  $(7 - 5i)/(-1 + 7i)$
  - C.  $(4 - 19i)/(4 + 5i)$

- D.  $(25+2i)/(-1+7i)$
- E. Tidak ada jawaban yang benar

**Kunci jawaban: D**

5. Sebuah vektor  $v = (1, 1, 1)$  diputar sebesar 90 derajat berlawanan arah jarum jam, mempunyai bayangan  $v' = (1.707, 0.293, 0)$ . Sumbu putar dari rotasi tersebut adalah :
- A.  $(1,1,0)$
  - B.  $(1,0,1)$
  - C.  $(0,1,1)$
  - D.  $(1,0,0)$
  - E. Tidak ada jawaban yang benar

**Kunci jawaban: A**

6. Dalam perkalian geometri jika sebuah vektor dikalikan dengan bivektor hasilnya adalah :
- A. Kombinasi dari skalar, vektor dan bivektor
  - B. Kombinasi skalar dan bivektor
  - C. Kombinasi vektor dan trivektor
  - D. Kombinasi skalar, vektor, bivektor, dan trivektor
  - E. Tidak ada jawaban yang benar

**Kunci jawaban: C**

7. Berapakah hasil dari operasi aljabar kompleks berikut  $\frac{1+5i}{-3i}$
- A.  $-\frac{15}{9} + \frac{1}{9}i$
  - B.  $\frac{15}{9} + \frac{3}{9}i$
  - C.  $-\frac{5}{3} + \frac{1}{3}i$
  - D.  $-\frac{5}{3} + \frac{3}{3}i$
  - E. Tidak ada jawaban yang benar

**Kunci jawaban: C**

8. Diketahui  $a = e_1 + 3e_2$  dan  $b = 4e_1 + 7e_2$ , hitunglah perkalian geometri dari  $ab$
- A.  $-17 + 12(e_1 \wedge e_2)$
  - B.  $17 + 12(e_1 \wedge e_2)$
  - C.  $17 - 12(e_1 \wedge e_2)$
  - D.  $-17 - 12(e_1 \wedge e_2)$
  - E. Tidak ada jawaban yang benar

**Kunci jawaban: E**

9. Tentukan bayangan bilangan kompleks  $z = 2 - 6i$  jika diputar sejauh 60 derajat berlawanan arah jarum jam
- A.  $z' = 1 - 4i + 3\sqrt{3}$
  - B.  $z' = 1 - 4i + 2\sqrt{3}$

- C.  $z' = 1 - 3i + 3\sqrt{3}$
- D.  $z' = 1 - 4i + 4\sqrt{3}$
- E. Tidak ada jawaban yang benar

**Kunci jawaban: E**

10. Hasil  $I^7$  adalah (Keterangan:  $I$  adalah *pseudoscalar* di  $\mathbb{R}^3$ ):
- A. 1
  - B. -1
  - C.  $e_{123}$
  - D.  $e_{213}$
  - E.  $-e_{123}$
  - F.  $-e_{312}$
  - G. Tidak ada jawaban yang benar

**Kunci jawaban: E**

11. Vektor  $z = 3e_1 - 5e_2$  diubah menjadi bilangan kompleks sekawan (*conjugate*) menjadi:
- A.  $3 - 5I$
  - B.  $3 + 5I$
  - C.  $-3 - 5I$
  - D.  $-3 + 5I$
  - E.  $5 - 3I$
  - F.  $5 + 3I$
  - G. Tidak ada jawaban yang benar

**Kunci jawaban: B**

12. Volume *parallelepiped* yang dibentuk oleh vektor-vektor  $a$ ,  $b$ , dan  $c$ , dalam hal ini  $a = 2e_1$ ,  $b = e_1 + 2e_2$ , dan  $c = 3e_3$  adalah
- A. 17
  - B. 12
  - C. 7
  - D. 8
  - E. Tidak ada jawaban yang benar

**Kunci jawaban: B**

**B. Essay**

**Jawablah soal uraian di bawah ini pada lembar jawaban**

1. Jika diketahui bahwa  $q_1$  dan  $q_2$  adalah quaternion maka apakah

$$|q_1 q_2| = |q_1| |q_2|$$

Jika ya, buktikanlah. Jika tidak juga buktikanlah.

**(10)**

**Penyelesaian:**

$$\begin{aligned}
|q_1 q_2| &= \sqrt{(q_1 q_2)(q_1 q_2)^*} \\
&= \sqrt{q_1 q_2 q_2^* q_1^*} \\
&= \sqrt{q_1 |q_2|^2 q_1^*} \\
&= |q_2| \sqrt{q_1 q_1^*} \\
&= |q_2| |q_1| \\
&= |q_1| |q_2|
\end{aligned}$$

2. Diketahui notasi quaternion dan operasinya sebagai berikut:

$$v = (3, -1, -2), r = (2, 4, -4), \theta = \frac{\pi}{4}$$

a. Berikan nilai quaternion  $q$  yang mewakili rotasi sebesar  $\theta$  terhadap sumbu  $r$

b. Berikan nilai quaternion  $p$  mewakili vektor  $v$

c. Hitunglah  $qp$

d. Hitunglah invers dari  $q$ , catatan:  $q^{-1}$

e. Berdasarkan jawaban c dan d, hitung  $v' = (qp) q^{-1}$

**(3 + 3 + 4 + 3 + 4)**

**Penyelesaian:**

**a)**

$$\theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \frac{(2, 4, -4)}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2}} = \frac{1}{6}(2, 4, -4) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$q = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{r}$$

$$= \cos\left(\frac{45}{2}\right) + \sin\left(\frac{45}{2}\right)\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$= 0.924 + 0.383\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$= 0.924 + 0.128i + 0.255j - 0.255k$$

**b)**

$$p = 0 + 3i - j - 2k$$

**c)**

$$qp = (0.924 + 0.128i + 0.255j - 0.255k)(3i - j - k)$$

$$= 2.772i - 0.924j - 1.848k - 0.384 - 0.128k + 0.256j$$

$$\begin{aligned}
& -0.765k + 0.255 - 0.51i - 0.765j - 0.256i - 0.51 \\
& = -0.384 + 0.255 - 0.51 + 2.772i - 0.51i - 0.255i \\
& \quad -0.924j + 0.256j - 0.765j + 1.848k - 0.128k - 0.165k \\
& = -0.639 + 2.007i - 1.433j - 2.741k
\end{aligned}$$

**d)**

$$\begin{aligned}
q^{-1} & = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{r} \\
& = \cos\left(\frac{45}{2}\right) - \sin\left(\frac{45}{2}\right)\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \\
& = 0.924 - 0.383\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \\
& = 0.924 - 0.128i - 0.255j + 0.255k
\end{aligned}$$

**e)**

$$\begin{aligned}
v' & = (qp)q^{-1} = (-0.639 + 2.007i - 1.433j - 2.741k)(0.924 - 0.128i - 0.255j + 0.255k) \\
& = -0.59 + 0.081i + 0.162j - 0.162k \\
& \quad + 1.854i + 0.256 - 0.51k - 0.51j \\
& \quad - 1.324j - 0.183k - 0.365 - 0.365i \\
& \quad - 2.532k - 0.350j - 0.698i + 0.698
\end{aligned}$$

**Sampai sini sudah cukup, jika diteruskan:**

$$\begin{aligned}
& = -0.59 + 0.256 - 0.365 + 0.698 \\
& \quad + 0.081i + 1.854i - 0.365i - 0.698i \\
& \quad + 0.162j - 0.51j - 1.324j - 0.350j \\
& \quad - 0.162k - 0.51k - 0.183k - 2.532k \\
& = 0 + 0.872i - 2.022j - 3.387k
\end{aligned}$$

3. Tentukan tiga buah bilangan kompleks yang memenuhi  $z^3 = i$  (imajiner)

(10)

Penyelesaian:

Solusi Essay no 3.

$$z^3 = i = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \quad k=0,1,2,$$

$$z = i^{1/3} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k\right)$$

utk  $k=0$

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

utk  $k=1$

$$\begin{aligned} z_2 &= \cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

utk  $k=2$

$$\begin{aligned} z_3 &= \cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi \\ &= -i \end{aligned}$$

Jadi 3 bilangan kompleks  $z_1, z_2, \text{ dan } z_3$

4. Diberikan tiga buah vektor (satu vector belum diketahui) sebagai berikut:

$$a = 2e_1 + e_2 - e_3$$

$$b = e_1 - e_2 - e_3$$

- a) Jika  $B$  adalah multivektor,  $B = ab$ , maka jika  $B = cb$ , hitunglah vektor hitunglah  $c$   
 b) Tentukan perpotongan bidang yang dibentuk oleh vektor  $a$  dan  $b$  dengan bidang yang dibentuk oleh vektor  $b$  dan  $c$

(7,5 + 7,5)

**Penyelesaian:**

a)  $B = ab = (2e_1 + e_2 - e_3)(e_1 - e_2 - e_3) = 2 - 3e_{12} - 2e_{23} + e_{31}$

$$B = cb \rightarrow c = Bb^{-1}$$

$$b^{-1} = b/\|b\| = (e_1 - e_2 - e_3)/3$$

$$c = (2 - 3e_{12} - 2e_{23} + e_{31}) (e_1 - e_2 - e_3)/3 = (6e_1 + 3e_2 - 3e_3)/3 = 2e_1 + e_2 - e_3 = a$$

b)  $B = a \wedge b = (2e_1 + e_2 - e_3) \wedge (e_1 - e_2 - e_3) = -3e_{12} - 2e_{23} + e_{31}$

$$C = b \wedge c = (e_1 - e_2 - e_3) \wedge (2e_1 + e_2 - e_3) = 3e_{12} + 2e_{23} - e_{31}$$

Perpotongan bidang B dengan C:

$$B \vee C = B^* \cdot C$$

$$B^* = e_{123}(-3e_{12} - 2e_{23} + e_{31}) = 2e_1 - e_2 + 3e_3$$

$$B \vee C = B^* \cdot C = (2e_1 - e_2 + 3e_3) \cdot (3e_{12} + 2e_{23} - e_{31})$$

Mengingat  $a \cdot B = (aB - Ba)/2$  maka:

$$(2e_1 - e_2 + 3e_3) \cdot (3e_{12} + 2e_{23} - e_{31}) = \frac{1}{2} ((2e_1 - e_2 + 3e_3)(3e_{12} + 2e_{23} - e_{31}) - (3e_{12} + 2e_{23} - e_{31})(2e_1 - e_2 + 3e_3))$$

$$\begin{aligned} (2e_1 - e_2 + 3e_3)(3e_{12} + 2e_{23} - e_{31}) &= 0 + 6e_2 + 12e_{123} + 2e_3 + 3e_1 - 2e_3 + e_{123} + 9e_{123} - \\ &\quad 6e_2 - 3e_1 \\ &= 12e_{123} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3e_{12} + 2e_{23} - e_{31})(2e_1 - e_2 + 3e_3) &= 6e_{121} - 3e_{122} + 9e_{123} + 4e_{231} - 2e_{232} + 6e_{233} - \\ &\quad 2e_{311} + e_{312} - 3e_{313} \\ &= 12e_{123} \end{aligned}$$

Jadi,

$$(2e_1 - e_2 + 3e_3) \cdot (3e_{12} + 2e_{23} - e_{31}) = \frac{1}{2} (12e_{123} - 12e_{123}) = 0$$

Kesimpulan: kedua bidang tersebut berimpit (parallel), sehingga perpotongannya adalah pada bidang itu sendiri

5. Prediksi nilai anda untuk mata kuliah ini (A/AB/B/BC/C/D/E)

(2)