Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama :…………………………
NIM/Kelas:…………………………
T.tangan:…………………………

Solusi Kuis ke-3 IF2123 Aljabar Linier dan Geometri (3 SKS) – Vektor & nilai eigen, SVD, LU, Aljabar kompleks, Aljabar quaternion
Dosen: Rinaldi Munir, Judhi Santoso, Rila Mandala, Arrival Dwi Sentosa
Selasa, 21 November 2023
Waktu: 55 menit

1. Diketahui dua buah matriks A dan P sebagai berikut: **(Nilai 25)**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika matriks P mendiagonalisasi matriks A, maka hitunglah
a) A^{1000} b) A^{1221} c) A^{-123}

Jawaban:
Tentukan terlebih dahulu matriks diagonal D sebagai berikut:

$$D = P^{-1} A\, P$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = P\, D\, P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

a) $A^{1000} = P\, D^{1000}\, P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^{1000} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{1000} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{1000} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = I$

b) $A^{1221} = P\, D^{1221}\, P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^{1221} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{1221} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{1221} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

c) $A^{-123} = (A^{123})^{-1}$: jawabnya bisa diambil dari b) kemudian di inverskan

2. Selesaikan persamaan linear di bawah ini dengan menggunakan dekomposisi LU-gauss **(Nilai 20)**

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 12 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = -8 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 16 \end{cases}$$

Jawaban:

Kalikan baris 2 dengan (-1) dan tukar dengan baris 1 untuk mempermudah perhitungan

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 12 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 16 \end{cases} \qquad b=\begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix} R_2\text{-}2R_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix} R_3\text{-}3R_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} R_3\text{-}5R_2 \rightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Masukkan variabel pengurang yang digunakan ke dalam matriks L :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

L y = b

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$y_1 = 8$

$2y_1 + y_2 = 12$
$y_2 = -4$

$3y_1+5y_2+y_3= 16$
$y_3 = 12$

Ux = y

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$4x_3= 12$
$x_3 = 3$

$x_2-x_3= -4$
$x_2 = -1$

$x_1-3x_2+x_3= 8$
$x_1 = 2$

3. Diketahui sebuah matriks kompleks 3x3 sebagai berikut: $A = \begin{pmatrix} 3-i & 2+3i & i \\ 4 & -3-2i & 0 \\ 8+3i & 2 & -2i \end{pmatrix}$, hitunglah det($\bar{A}$)

Jawaban:

$$A = \begin{pmatrix} 3-i & 2+3i & i \\ 4 & -3-2i & 0 \\ 8+3i & 2 & -2i \end{pmatrix} \rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} 3+i & 2-3i & i \\ 4 & -3+2i & 0 \\ 8-3i & 2 & 2i \end{pmatrix}$$

Gunakan baris kedua sebagai acuan (karena mengandung 0)

$$\begin{vmatrix} 3+i & 2-3i & i \\ 4 & -3+2i & 0 \\ 8-3i & 2 & 2i \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 2-3i & i \\ 2 & 2i \end{vmatrix} + (-3+2i) \begin{vmatrix} 3+i & i \\ 8-3i & 2i \end{vmatrix} + 0$$

$= -4\{(2 - 3i)(2i) – 2i\} + (-3 + 2i)\{(3 + i)(2i) – i(8 - 3i)\}$
$= -4(4i - 6i^2 – 2i)+(-3 + 2i)(6i + 2i^2 – 8i + 3i^2)$
$= -4(4i + 6 – 2i) + (-3 + 2i)(6i – 2 – 8i - 3)$
$= -4(6 + 2i) + (-3 – 2i)(-5 – 2i)$
$= -24 - 8i + (15 + 6i + 10i + 4i^2)$

$= -24 - 8i + 15 + 6i + 10i - 4$
$= -13 + 8i$

(Nilai 15)

4. Misalkan sebuah vektor ***p*** = **i** + 5**j** - 2**k** diputar berlawanan arah jarum jam sejauh $\theta = 120°$ dengan sumbu rotasinya adalah **u** = **i** + **j** + **k**. Tentukan vektor bayangannya. **(Nilai 20)**

Jawaban:

$\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

$\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

$\mathbf{p} = (1, 5, -2) = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \rightarrow p = 0 + i + 5j - 2k$

$q = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)\,\hat{\mathbf{u}} = \cos 60° + \sin 60°(\frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k))$

$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(i + j + k) = \frac{1}{2}(1 + i + j + k)$

$q^{-1} = \cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)\,\hat{\mathbf{u}} = \cos 60° - \sin 60°(\frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k))$

$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)) = \frac{1}{2}(1 - i - j - k)$

$p' = qpq^{-1}$

$= \frac{1}{2}(1 + i + j + k)(0 + i + 5j - 2k)\frac{1}{2}(1 - i - j - k)$

$= \frac{1}{2}(-6 + 6i - 3j - 5k)\frac{1}{2}(1 - i - j - k)$

$= \frac{1}{4}(12i + 2j - 8k + 0)$

$= 0 + 3i + \frac{1}{2}j - 2k$

Maka, $p' = (3, \frac{1}{2}, -2) = 3\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

5. Diberikan sebuah matriks sebagai berikut: $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. Dengan menggunakan metode SVD, tentukan berapakah rank(A) dan matriks $\sum$ serta U saja. (Bonus 5 jika menghitung matriks V^T juga) **(Nilai 20+5)**

Jawaban:

$\Sigma = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

Rank(A) = 1

==

Kerjakan pada bagian ksosong di bawah ini dan halaman dibaliknya, jika kurang pakai kertas sendiri.