Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama :…………………………
NIM :…………………………
T.tangan:…………………………

Solusi Kuis ke-2 IF2123 Aljabar Linier dan Geometri (3 SKS) – Vektor di Ruang Euclidean
Dosen: Rinaldi Munir, Judhi Santoso, Rila Mandala, Arrival Dwi Sentosa
Selasa, 3 Oktober 2023
Waktu: 50 menit

1. Diketahui tiga buah vektor **u1** = (1, 3, 2, 1), **u2** = (2, -2, –5, 4), dan **u3** = (2, -1, 3, 6). Jika **v** = (2, 5, -4, 0), tuliskan **v** sebagai kombinasi linier dari **u1**, **u2**, *u3*. Jika tidak memungkinkan, jelaskan alasannya.

Jawaban:
v = au1 + bu2 + cu3
(2, 5, -4, 0) = (a + 2b + 2c, 3a – 2b – c, 2a – 5b + 3c, a + 4b +6c)

Dalam bentuk SPL:
a + 2b + 2c = 2
3a – 2b – c = 5
2a – 5b + 3c = -4
a + 4b + 6c = 0

Dalam bentuk matriks augmentasi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \\ 2 & -5 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Lakukan metode eliminasi gauss jordan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka, diketahui bahwa a = 2, b = 1, c = -1. Terbentuk kombinasi linier nya v adalah:
v = 2u1 + u2 – u3

2. Diketahui vektor **a** = ***i*** + ***j*** - *r**k***, vektor **b** = ***i*** – ***j*** –2***k***. Sudut antara vektor **a** dan vector **b** adalah 60 derajat. Hitunglah nilai *r*.

Jawaban:

Diketahui $\vec{a} = (1, 1, -r), \vec{b} = (r, -r, -2)$ dan $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \theta = 60^\circ$.
Dengan menggunakan aturan kosinus pada vektor, diperoleh

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\
&= \frac{(1, 1, -r) \bullet (r, -r, -2)}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (-r)^2} \cdot \sqrt{(r)^2 + (-r)^2 + (-2)^2}} \\
\cos 60^\circ &= \frac{1(r) + 1(-r) + (-r)(-2)}{\sqrt{2 + r^2} \cdot \sqrt{2r^2 + 4}} \\
\frac{1}{2} &= \frac{2r}{\sqrt{2r^4 + 8r^2 + 8}} \\
4r &= \sqrt{2r^4 + 8r^2 + 8} \\
&\text{Kuadratkan kedua ruas} \\
16r^2 &= 2r^4 + 8r^2 + 8 \\
0 &= 2r^4 - 8r^2 + 8 \\
0 &= r^4 - 4r^2 + 4 \\
0 &= (r^2 - 2)(r^2 - 2).
\end{aligned}$$

Didapat $r^2 = 2 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{2}$.

3. Diberikan tiga buah titik di R^3 yaitu A(1,3,0), B(2,0,1), dan C(1,1,1).
   a) Tentukan persamaan bidang dalam bentuk Ax + By + Cz + D = 0 yang melewati ketiga buah titik tersebut.
   b) Jika diketahui titik E(1,2,1), tentukan jarak titik tersebut ke bidang diatas.

Jawaban:

a). Tentukan terlebih dulu vektor normal dari bidang yg akan dicari

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \text{ x } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ x } \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Persamaan bidang melalui $\mathbf{x_0}$ dengan vektor normal $\mathbf{n}$ adalah :

$$\mathbf{n} \,.\, (\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) = 0$$

Ambil $\mathbf{x_0}$ vektor yang melalui titik A, yaitu $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} \,.\, (\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \\ z-0 \end{pmatrix} \\
&= -1\,(x-1) - 1\,(y-3) - 2\,(z-0) \\
&= -x - y - 2z + 4 = 0
\end{aligned}$$

atau $x + y + 2z - 4 = 0$

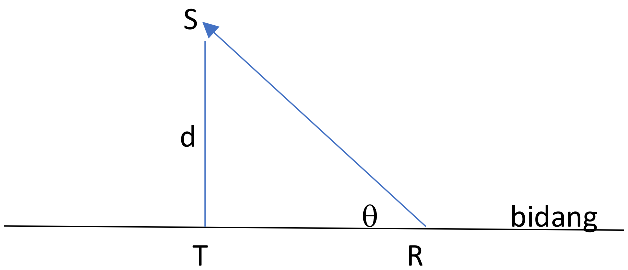
b). Dengan rumus jarak titik ke bidang diperoleh :

$$d = \frac{|-1(1) - 1(2) - 2(1) + 4|}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

4. Diketahui sebuah bidang dengan persamaan x + 4y + 2z - 28 = 0. Titik R(-8, 4, 10) terletak pada bidang tersebut sedangkan titik S(-2, 0, 1) tidak terletak pada bidang. Hitung sudut yang dibentuk oleh oleh $\overrightarrow{RS}$ dengan bidang.

Jawaban:

Ada banyak cara untuk menghitung sudut antara vektor dengan bidang, salah satunya dengan menggunakan trigonometri.



$\overrightarrow{RS}$ = (-2 – (-8), 0 – 4, 10 – 1) = (6, -4, 9)

$\|\overrightarrow{RS}\|$ = $\sqrt{36+16+81}$ = $\sqrt{135}$

Jarak titik S ke bidang:

$$d = \frac{|-2+2-28|}{\sqrt{1+16+4}} = \frac{28}{\sqrt{21}} = \frac{4}{3}\sqrt{21}$$

$$\sin\theta = \frac{d}{\|\overrightarrow{RS}\|} = \frac{\frac{4}{3}\sqrt{21}}{\sqrt{135}} = 0.554$$

θ = 31,72° atau 32 derajat

5. Tinjau titik P(3, –1, 4), Q(6, 0, 2), dan R(5, 1, 1).
   (a) Tentukan sebuah titik S di R^3 yang komponen pertamanya adalah –1 sedemikian sehingga $\overrightarrow{PQ}$ paralel dengan $\overrightarrow{RS}$.
   (b) Tentukan volume *paralellpiped* yang dibentuk oleh $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, dan $\overrightarrow{PS}$.

Jawaban:

(a) Misalkan S adalah (–1, s_1, s_2). Maka **u** = $\overrightarrow{PQ}$ = (6 – 3, 0 – (-1), 2 – 4) = (3, 1, -2) dan **v** = $\overrightarrow{RS}$ = (-6, s_2 – 1, s_3 – 1)

u dan **v** paralel maka **u** × **v** = 0

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{0}.$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\times\mathbf{v} &= \left(\begin{vmatrix}1 & -2\\ s_2-1 & s_3-1\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}3 & -2\\ -6 & s_3-1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}3 & 1\\ -6 & s_2-1\end{vmatrix}\right)\\ &= (s_3-1+2(s_2-1), -(3(s_3-1)-12), 3(s_2-1)+6)\\ &= (2s_2+s_3-3, -3s_3+15, 3s_2+3)\end{aligned}$$

Karena **u** × **v** = 0, maka

$3s_2 + 3 = 0 \rightarrow s_2 = -1$

$-3s_3 + 15 = 0 \rightarrow s_3 = 5$

Jadi, S(-1, -1, 5)

(b) $\overrightarrow{PQ}$ = (6 – 3, 0 – (-1), 2 – 4) = (3, 1, -2), $\overrightarrow{PR}$ = (5 – 3, 1 – (-1), 1 – 4) = (2, 2, -3), $\overrightarrow{PS}$ = (-1 – 3, -1 – (-1), 5 – 4) = (-4, 0, 1),

Volume paralelpiped yang dibentuk oleh $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, dan $\overrightarrow{PS}$ adalah:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot (\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PS}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Jadi volume paralelpiped adalah = 0, ketiga buah vektor terletak dalam satu bidang