

Seri bahan kuliah Algeo #26

Aljabar Quaternion

(Bagian 2)

Update 2023

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika

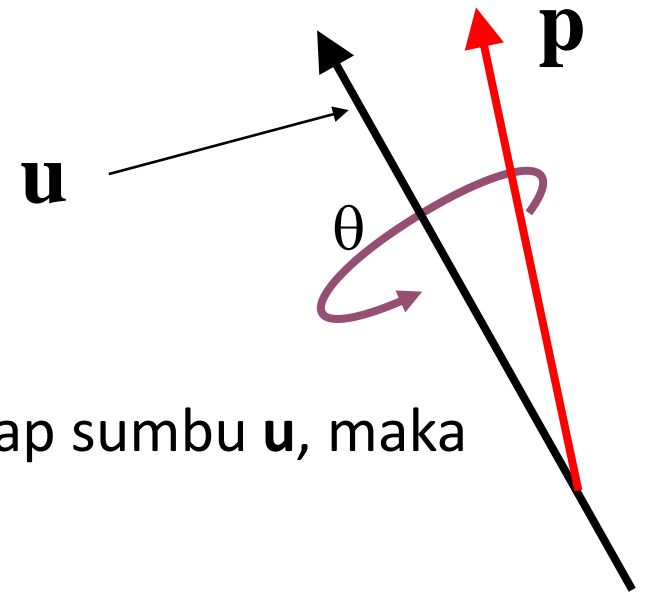
STEI-ITB

2023

Sumber:

John Vince, *Geometric Algebra for Computer Graphics*. Springer. 2007

Rotasi Vektor dengan Quaternion



- Misalkan p adalah sebuah vektor di R^3
- Vektor p diputar sejauh θ berlawanan arah jarum jam terhadap sumbu u , maka bayangannya adalah p' , yang dihitung dengan persamaan:

$$p' = qpq^{-1}$$

yang dalam hal ini,

$$p = xi + yj + zk$$

$$p = 0 + ix + jy + kz$$

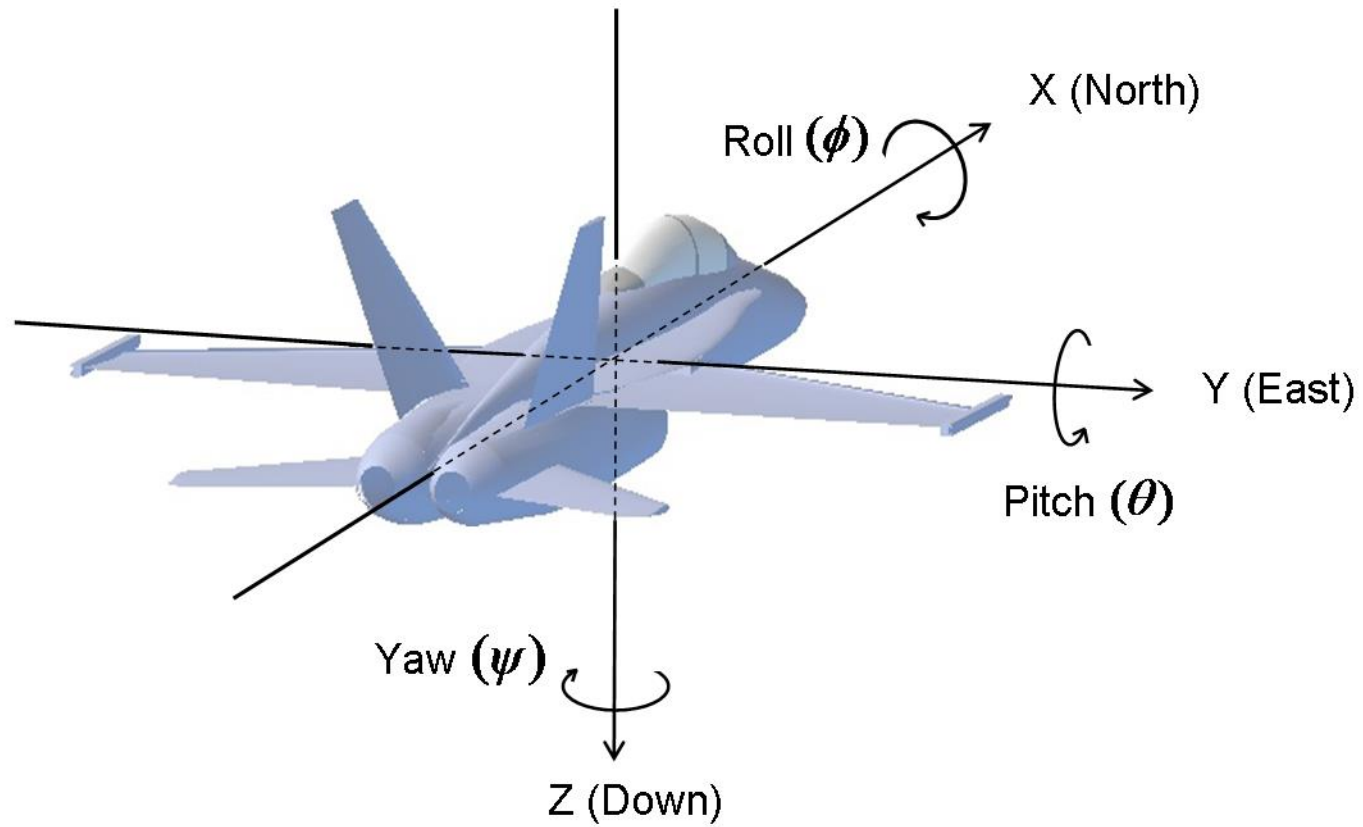
$$q = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)\hat{u}$$

$$q^{-1} = \cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)\hat{u}$$

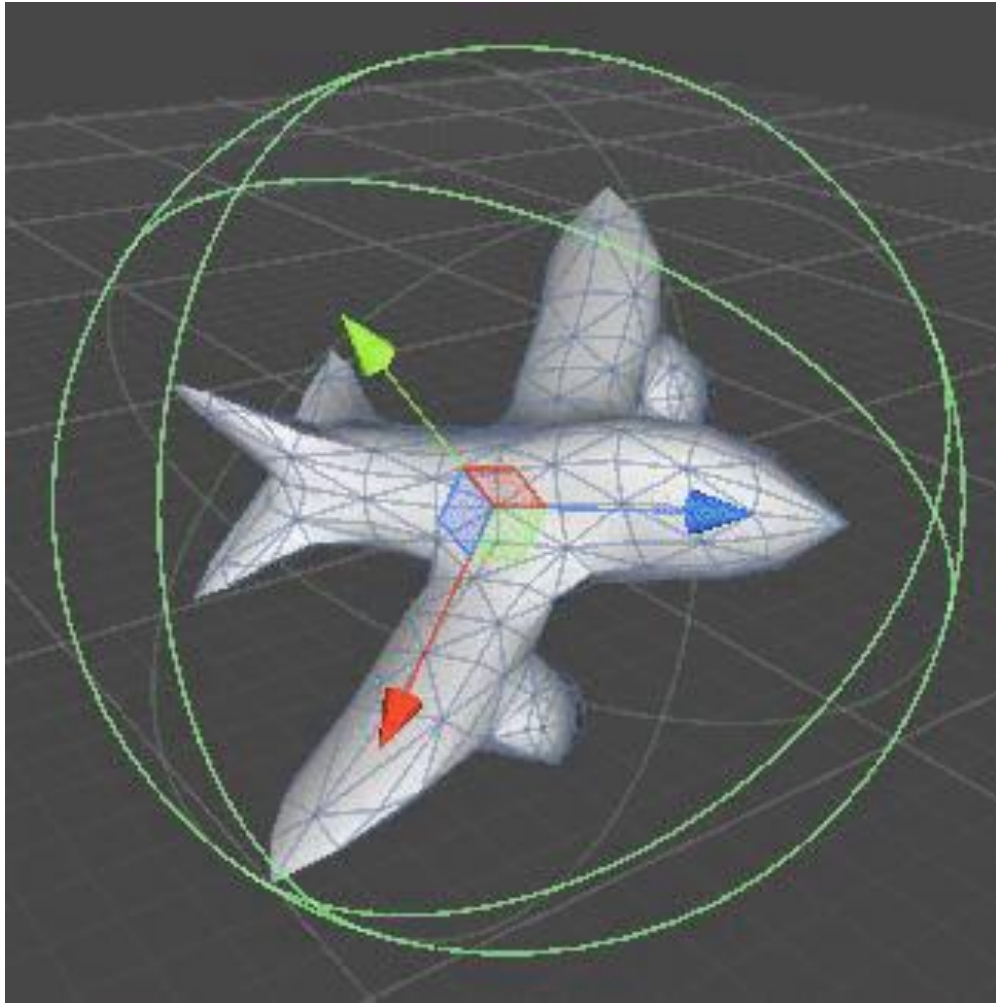
\hat{u} adalah vektor satuan dari vektor $u = xi + yj + zk$

$$\hat{u} = x'i + y'j + z'k$$

dengan $\|\hat{u}\| = 1$



Sumber gambar: <http://www.chrobotics.com/library/understanding-quaternions>



Contoh 2: Misalkan sebuah titik $P(0, 1, 1)$, atau sebagai vektor $\mathbf{p} = (0, 1, 1)$, diputar berlawanan arah jarum jam sejauh $\theta = 90^\circ$ dengan sumbu rotasinya adalah $\mathbf{u} = \mathbf{j}$. Tentukan vektor bayangannya.

Jawaban:

$\mathbf{u} = \mathbf{j}$, panjangnya sama dengan satu, maka vektor satuannya juga sama yaitu $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{j}$

$$\mathbf{p} = (0, 1, 1) = 0\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Nyatakan \mathbf{p} dalam quaternion $\rightarrow p = 0 + 0\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

$$q = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) \hat{\mathbf{u}} = \cos 45^\circ + \sin 45^\circ(0\mathbf{i} + \mathbf{j} + 0\mathbf{k})$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(0\mathbf{i} + \mathbf{j} + 0\mathbf{k}) = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + 0\mathbf{i} + \mathbf{j} + 0\mathbf{k})$$

$$q^{-1} = \cos(\theta/2) - \sin(\theta/2) \hat{\mathbf{u}} = \cos 45^\circ - \sin 45^\circ(0\mathbf{i} + \mathbf{j} + 0\mathbf{k})$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(0\mathbf{i} + \mathbf{j} + 0\mathbf{k}) = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - 0\mathbf{i} - \mathbf{j} - 0\mathbf{k})$$

Bayangan vektor \mathbf{p} adalah \mathbf{p}' :

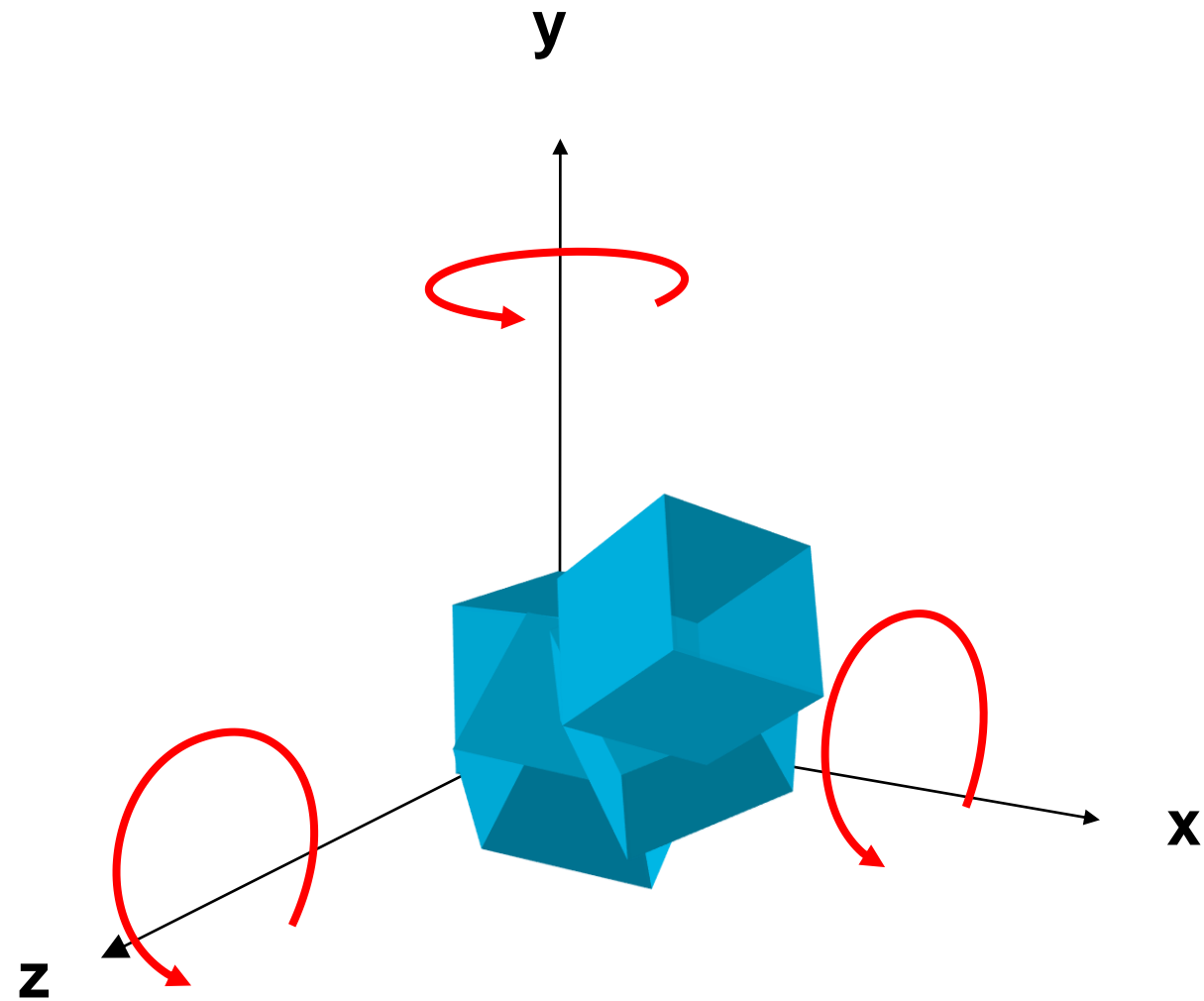
$$\mathbf{p}' = q\mathbf{p}q^{-1}$$

Dalam bentuk perkalian quaternion:

$$\begin{aligned} p' &= qpq^{-1} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + 0i + j + 0k)(0 + 0i + j + k) \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - 0i - j - 0k) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 + i + j + k) \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - 0i - j - 0k) \\ &= \frac{1}{2}(-1 + 1 + j + i + j + k + i - k) \\ &= \frac{1}{2}(0 + 2i + 2j + 0k) \\ &= 0 + i + j + 0k \end{aligned}$$

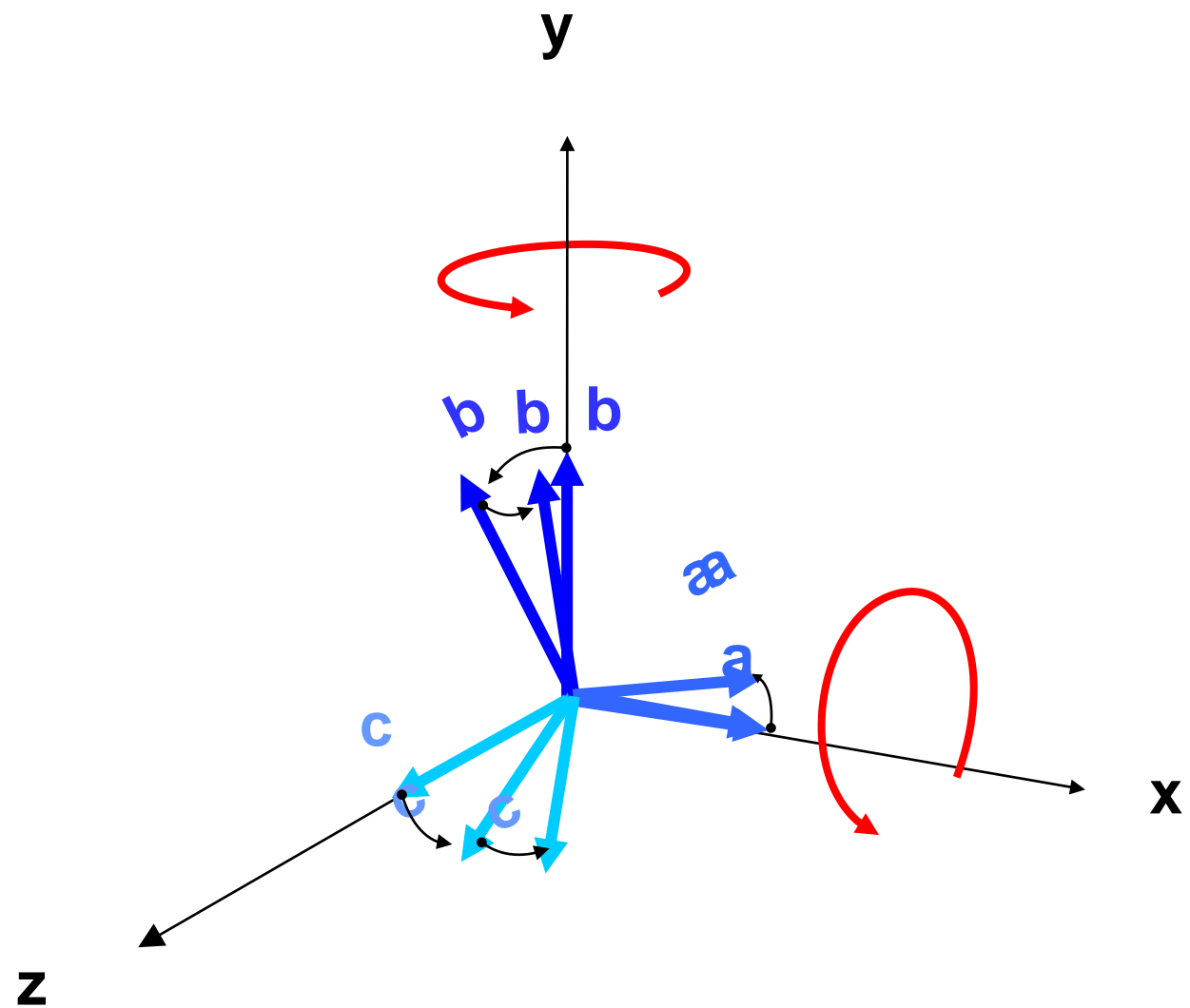
Jadi, $\mathbf{p}' = (1, 1, 0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

Let's do rotation!

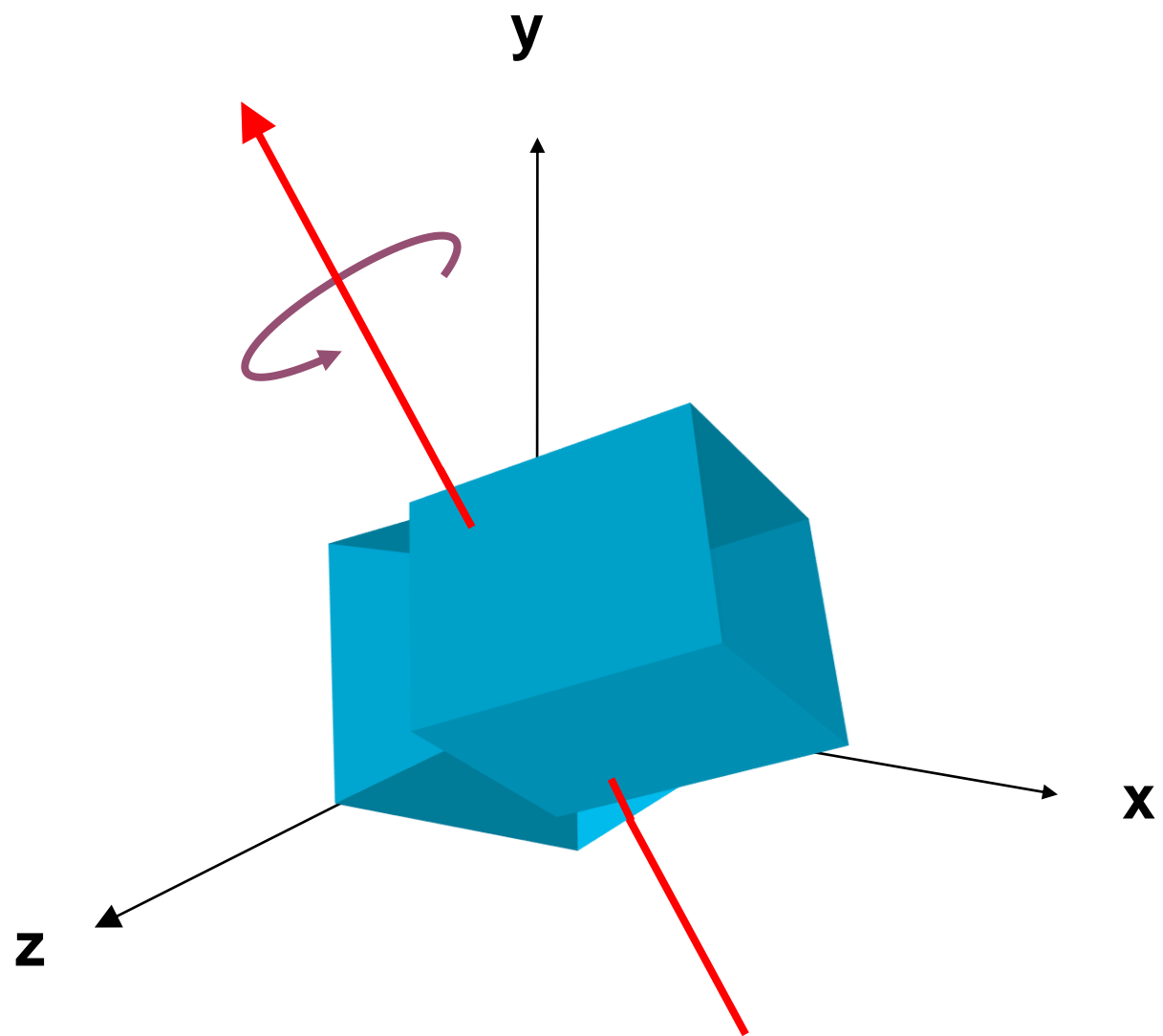


Sumber: Jyun-Ming Chen, 3D-Kinematics

Let's do rotation!



Let's do another one!



Contoh 3 (Soal UAS 2019): Misalkan sebuah vektor $\mathbf{p} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ diputar berlawanan arah jarum jam sejauh $\theta = 120^\circ$ dengan sumbu rotasinya adalah $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Tentukan vektor bayangannya.

Jawaban:

$\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, panjangnya $= \sqrt{3}$, maka vektor satuannya $\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

$\mathbf{p} = (2, -4, 5) = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

Nyatakan \mathbf{p} dalam quaternion $\rightarrow p = 0 + 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

$$\begin{aligned} q &= \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) \hat{\mathbf{u}} = \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \left(\frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = \frac{1}{2} (1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q^{-1} &= \cos(\theta/2) - \sin(\theta/2) \hat{\mathbf{u}} = \cos 60^\circ - \sin 60^\circ \left(\frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \right) = \frac{1}{2} (1 - \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \end{aligned}$$

Bayangan vektor \mathbf{p} adalah \mathbf{p}' :

$$\mathbf{p}' = \mathbf{q}\mathbf{p}\mathbf{q}^{-1}$$

Dalam bentuk perkalian quaternion:

$$\begin{aligned} p' &= qpq^{-1} \\ &= \frac{1}{2}(1 + i + j + k)(0 + 2i - 4j + 5k) \frac{1}{2}(1 - i - j - k) \\ &= \frac{1}{2}(11i - 7j - k - 3) \frac{1}{2}(1 - i - j - k) \\ &= \frac{1}{4}(20i + 8j - 16k + 0) \\ &= 0 + 5i + 2j - 4k \end{aligned}$$

Jadi, $\mathbf{p}' = (5, 2, -4) = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

Latihan (Kuis 2022)

Diberikan sebuah vektor $p = (1, 2, 3)$. Vektor p diputar sebesar 240 derajat berlawanan arah jarum jam dengan sumbu putarnya adalah $u = (1, 1, 1)$. Hitunglah vektor bayangan dari p (misal p') dengan rotasi diatas.

Jawaban:

$$\mathbf{u} = (1, 1, 1) \rightarrow \hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1)$$

$$\mathbf{p} = (1, 2, 3) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{p} \text{ dalam quaternion } p = 0 + \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} q &= \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)\hat{\mathbf{u}} = \cos 120^\circ + \sin 120^\circ \left(\frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \right) \\ &= \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \right) = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = \frac{1}{2} (-1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q^{-1} &= \cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)\hat{\mathbf{u}} = \cos 120^\circ - \sin 120^\circ\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)\right) \\
 &= \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)\right) = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}(i + j + k) = \frac{1}{2}(-1 - i - j - k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}' &= \mathbf{p}q^{-1} = \frac{1}{2}(-1 + i + j + k)(0 + i + 2j + 3k)\frac{1}{2}(-1 - i - j - k) \\
 &= \frac{1}{4}(-1 + i + j + k)(0 + i + 2j + 3k)(-1 - i - j - k) \\
 &= \frac{1}{4}(0 + 8i + 12j + 4k) = 0 + 2i + 3j + k
 \end{aligned}$$

Jadi bayangan vektor \mathbf{p} adalah $\mathbf{p}' = (2, 3, 1) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

Latihan (Kuis 2020)

Diketahui vektor $\mathbf{p}=(1,1,1)$, yang diputar terhadap sumbu $\mathbf{u}=(1,1,0)$ sebesar 90° berlawanan jarum jam. Sebutkan bayangannya \mathbf{p}' . Tentukan:

- (a) Vektor \mathbf{q} dan \mathbf{q}^{-1} yang berfungsi sebagai rotor.
- (b) Tentukan \mathbf{p}'

Jawaban:

$$(a) \mathbf{q} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right); \quad \mathbf{q}^{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right)$$

$$(b) \mathbf{p}' = \left(\sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \text{ atau } \mathbf{p}' = (1.70, 0.29, 0)$$

Latihan (Kuis 2021)

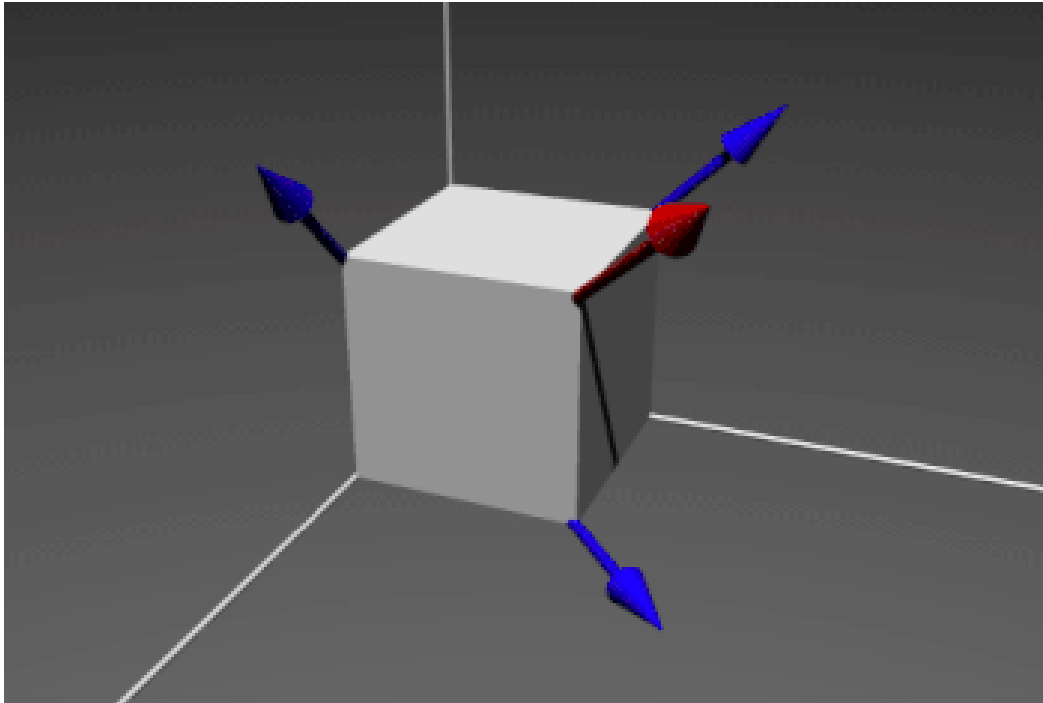
Diberikan sebuah vektor $\mathbf{p} = (2,3,1)$. Vektor \mathbf{p} diputar sebesar 120 derajat berlawanan arah dengan jarum jam dengan sumbu putarnya adalah $\mathbf{u} = (1,1,1)$.

- Tentukan quaternion q dan q^{-1} yang merupakan rotor.
- Hitunglah vektor bayangan dari \mathbf{p} (misal \mathbf{p}') dengan rotasi diatas.

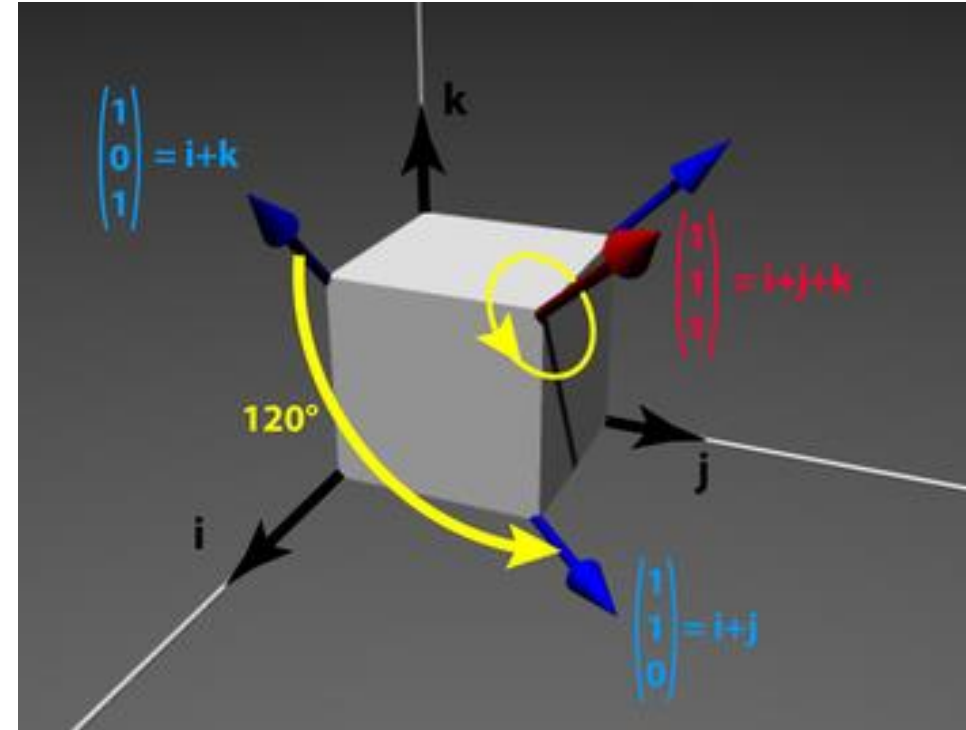
Jawaban:

a) $q = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$, $q' = (0.5, -0.5, -0.5, -0.5)$

b) $\mathbf{p} = (1, 2, 3)$



A rotation around its diagonal



Position and Landmark

$$\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{k} \quad \text{Sumbu putar: } \mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \mathbf{v}' = \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

Sudut putaran = 120°

(1) Kode program rotasi vektor dengan quaternion

“Dari Contoh 2: Misalkan sebuah titik $P(0, 1, 1)$, atau sebagai vektor $p = (0, 1, 1)$, diputar berlawanan arah jarum jam sejauh 90 derajat dengan sumbu rotasinya adalah $u = j$. Tentukan vektor bayangannya.”

```
# Buat objek quaternion dengan sumbu putar  $u = 0i + j + 0k$  dan
# sudut putar = 90 derajat
u = Quaternion(axis=[0.0, 1.0, 0.0], degrees = 90)

# Rotasi vektor  $p = (0, 1, 1)$  terhadap sumbu  $u$  sejauh 90 derajat
bayangan = u.rotate(Quaternion(vector=[0, 1, 1]))
print(bayangan)
```

```
•[37]: # Buat objek quaternion yang menyatakan sumbu rotasi  $u = 0i + j + 0k$  dan sudut putar = 90 derajat  
u = Quaternion(axis=[0.0, 1.0, 0.0], degrees = 90)
```

```
[38]: bayangan = u.rotate(Quaternion(vector=[0,1,1])) # Rotasikan vektor  $p = (0, 1, 1)$  terhadap sumbu  $u$ 
```

```
[39]: print(bayangan)
```

```
0.000 +1.000i +1.000j +0.000k
```

(2) Kode program rotasi vektor dengan quaternion

“Dari Contoh 3: Misalkan sebuah vektor $\mathbf{p} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ diputar berlawanan arah jarum jam sejauh $\theta = 120^\circ$ dengan sumbu rotasinya adalah $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Tentukan vektor bayangannya. “

```
[42]: # Buat objek quaternion yang menyatakan sumbu rotasi = i + j + k dan suut putar 120 derajat  
u = Quaternion(axis=[1, 1, 1], degrees = 120)
```

```
[43]: bayangan = u.rotate(Quaternion(vector=[2, -4, 5]))
```

```
[44]: print(bayangan)
```

```
-0.000 +5.000i +2.000j -4.000k
```

Latihan

(Soal UAS 2015)

Diketahui sebuah titik $P=(1,1,1)$ diputar terhadap sumbu $\mathbf{u} = j + k$ sebesar 180° , tentukan koordinat titik P' yang merupakan hasil dari rotasi tersebut.