

Seri bahan kuliah Algeo 23

Dekomposisi LU

Update 2023

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika

STEI-ITB

- Jika matriks A persegi *non-singular* maka ia dapat difaktorkan (di-dekomposisi) menjadi matriks segitiga bawah L (*lower*) dan matriks segitiga atas U (*upper*):

$$A = LU$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

L = matriks segitiga bawah (*lower triangular matrix*),

U = matriks segitiga atas (*upper triangular matrix*)

Untuk $n = 4$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

Contoh:

$$1) \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 11/13 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 13/2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 32/13 \end{bmatrix}$$

$$2) \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

3

Catatan:

1. Di dalam materi PPT ini, seperti juga di dalam literatur lain, elemen diagonal utama matriks L semuanya 1

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$A \qquad \qquad L \qquad \qquad U$

2. Di dalam buku Howard Anton, elemen di dalam diagonal utama matriks U yang semuanya 1 (matriks eselon baris), seperti di bawah ini:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A \qquad \qquad = \qquad \qquad L \qquad \qquad U$

3. Perbedaan keduanya tidak masalah karena hasil kali keduanya tetap sama dengan A . Kita akan menggunakan bentuk yang nomor 1

- Memfaktorkan matriks A menjadi matriks L dan U sehingga menjadi $A = LU$ dinamakan **dekomposisi LU** (*LU-decomposition*)
- Terdapat dua metode untuk memfaktorkan A menjadi L dan U :
 1. Metode *LU*-Gauss.
 - Berdasarkan pada metode eliminasi Gauss
 2. Metode reduksi Crout
 - Berdasarkan kesamaan dua buah matriks

Pemfaktoran dengan Metode LU-Gauss

Misalkan matriks A berukuran 4×4 difaktorkan atas L dan U ,

$$A = LU$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

- Di sini kita menggunakan simbol m_{ij} ketimbang l_{ij} , karena nilai l_{ij} berasal dari faktor pengali (m_{ij}) pada operasi baris elementer (OBE), yaitu $R_j - m_{ij}R_i$.
- Langkah-langkah pembentukan L dan U dari matriks A adalah sebagai berikut:

1. Nyatakan A sebagai $A = IA$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2. Lakukan eliminasi Gauss pada matriks A menjadi matriks U . Tempatkan faktor pengali m_{ij} pada posisi l_{ij} di dalam matriks I .
3. Setelah seluruh proses eliminasi Gauss selesai, matriks I menjadi matriks L , dan matriks A di ruas kanan menjadi matriks U .

Contoh 1 (Kasus: tidak ada pertukaran baris selama OBE):

(LU Gauss naif – tidak ada pertukaran baris)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Eliminasikan matriks A di ruas kanan menjadi matriks segitiga atas U , dan tempatkan faktor pengali m_{ij} pada posisi l_{ij} di matriks L .

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 - (-2/4)R_1 \\ \sim \\ R_3 - (1/4)R_1 \end{array} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 1.25 & 6.25 \end{bmatrix}$$

Tempatkan $m_{21} = -2/4 = -0.5$ dan $m_{31} = 1/4 = 0.25$ ke dalam matriks L :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Teruskan proses eliminasi Gauss pada matriks A ,

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 1.25 & 6.25 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - (1.25/-2.5)R_2} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix} = U$$

Tempatkan $m_{32} = 1.25/-2.5 = -0.5$ ke dalam matriks L :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

Aplikasi Dekomposisi LU

- Dekomposisi LU dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier $Ax = b$.

- Setelah A difaktorkan menjadi $A = LU$, maka

$$Ax = b$$

Ganti A dengan LU: $LUx = b$

- Misalkan

$$Ux = y$$

maka

$$Ly = b$$

Untuk memperoleh y_1, y_2, \dots, y_n , kita menggunakan teknik penyulihan maju (*forward substitution*):

$$Ly = b \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \text{diperoleh } y_1, y_2, \dots, y_n \\ \text{dengan teknik} \\ \text{penyulihan maju} \end{array}$$

Dan untuk memperoleh solusi SPL, x_1, x_2, \dots, x_n , kita menggunakan teknik penyulihan mundur (*backward substitution*):

$$Ux = y \rightarrow \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \text{diperoleh} \\ x_1, x_2, \dots, x_n \\ \text{dengan teknik} \\ \text{penyulihan} \\ \text{mundur} \end{array}$$

- Jadi, langkah-langkah menghitung solusi SPL $Ax = b$ dengan metode dekomposisi LU dapat diringkas sebagai berikut:
 1. Dekomposisi A menjadi matriks L dan U
 2. Pecahkan $Ly = b$, lalu hitung y dengan teknik penyulihan maju
 3. Pecahkan $Ux = y$, lalu hitung x dengan teknik penyulihan mundur
- Misalkan SPL $Ax = b$ adalah:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriks A sudah difaktorkan menjadi L dan U pada Contoh 1, yaitu

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix}$$

- Maka, solusi $Ax = b$ adalah sebagai berikut:

$$Ly = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow y_1 = 2$
 $\rightarrow -0.5y_1 + y_2 = 1 \rightarrow y_2 = 1 + 0.5y_1 = 1 + (0.5)(2) = 2$
 $\rightarrow 0.25y_1 - 0.5y_2 + y_3 = 0 \rightarrow y_3 = 0 - 0.25y_1 + 0.5y_2$
 $= 0 - (0.25)(2) + (0.5)(2)$
 $= 0 - (0.5) + (1) = 0.5$

$$Ux = y$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow 8.5x_3 = 0.5 \rightarrow x_3 = 0.5/8.5 = 0.0588$
 $\rightarrow -2.5x_2 + 4.5x_3 = 2 \rightarrow x_2 = (2 - 4.5x_3)/(-2.5)$
 $= (2 - (4.5)(0.0588))/(-2.5) = -0.69412$
 $\rightarrow 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \rightarrow x_1 = (2 - 3x_2 + x_3)/4$
 $= (2 - (3)(-0.69412) + 0.0588)/4$
 $= (2 + 0.3 + 0.5) = 1.03529$

Jadi, solusi SPL adalah $x_1 = 1.03529$, $x_2 = -0.69412$, dan $x_3 = 0.0588$

Contoh 2 (Kasus: ada pertukaran baris selama OBE)

Faktorkan matriks A berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

lalu pecahkan sistem $Ax = b$.

Penyelesaian:

Eliminasikan matriks A di ruas kanan menjadi matriks segitiga atas U , dan tempatkan faktor pengali m_{ij} pada posisi l_{ij} di matriks L .

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} R_2 - (2)R_1 \\ \sim \\ R_3 - (-1/1)R_1 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Tempatkan $m_{21} = 2$ dan $m_{31} = -1/1 = -1$ ke dalam matriks L :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Teruskan proses eliminasi Gauss pada matriks A . Dalam hal ini calon *pivot* bernilai 0, sehingga baris kedua dipertukarkan dengan baris ketiga:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{0} & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2 \Leftrightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Jangan lupa mempertukarkan juga $R_2 \Leftrightarrow R_3$ pada matriks L , kecuali elemen diagonalnya

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & 0 \\ -1 & m_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 \Leftrightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & 1 & 0 \\ \boxed{2} & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Jangan lupa mempertukarkan juga $R_2 \Leftrightarrow R_3$ pada vektor b ,

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad R_2 \Leftrightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Teruskan proses eliminasi Gauss pada matriks A :

$$R_3 - (0/2)R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U$$

Tempatkan $m_{32} = 0/2 = 0$ ke dalam matriks L :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Berturut-turut dihitung y dan x sebagai berikut:

$$Ly = b \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

y_1 , y_2 , dan y_3 dihitung dengan teknik penyulihan maju:

$$y_1 = 1$$

$$-y_1 + y_2 = 1 \rightarrow y_2 = 1 + y_1 = 1 + 1 = 2$$

$$2y_1 + 0y_2 + y_3 = 5 \rightarrow y_3 = 5 - 2y_1 = 3$$

$$Ux = y \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

x_1 , x_2 , dan x_3 dihitung dengan teknik penyulihan mundur:

$$3x_3 = 3 \quad \rightarrow \quad x_3 = 1$$

$$2x_2 + 0x_3 = 2 \quad \rightarrow \quad x_2 = 1$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1 \quad \rightarrow \quad x_1 = 1$$

Jadi, solusi sistem persamaan linier di atas adalah $x = (1, 1, 1)^T$.

Pertukaran baris untuk matriks yang berukuran besar diperlihatkan oleh matriks di bawah ini:

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 0 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_5 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 & e_5 & e_6 \\ 0 & 0 & 0 & f_4 & f_5 & f_6 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_5 \Leftrightarrow R_4 \\ (*) \end{matrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 0 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 & e_5 & e_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_5 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & f_4 & f_5 & f_6 \end{bmatrix}$$

Maka, baris ke-5 dan baris ke-4 pada matriks L juga harus dipertukarkan:

$$L \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 & 0 & 0 \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & x & 1 & 0 \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} & x & x & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_5 \Leftrightarrow R_4 \\ (*) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & 1 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & x & 1 & 0 \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} & x & x & 1 \end{bmatrix}$$

- Tidak semua matriks bujursangkar dapat difaktorkan menjadi L dan U. Perhatikan contoh di bawah ini.

Contoh 3: Faktorkan matriks A berikut menjadi L dan U

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R2 - 3R1 \\ \sim \\ R3 - 2R1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Matriks L sejauh ini} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Oleh karena baris 3 seluruhnya 0, maka nilai m_{32} tidak dapat ditentukan, sehingga matriks A tidak dapat difaktorkan menjadi LU.

Pemfaktoran dengan Metode Reduksi Crout

- Meskipun metode LU Gauss dapat digunakan untuk melakukan dekomposisi LU , terdapat metode dekomposisi LU lain yang digunakan secara luas, yaitu metode reduksi Crout
- Nama lain: **metode reduksi Cholesky** atau metode ***Dolittle***

Dalam membahas metode reduksi Crout, tinjau matriks 3×3 berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{2,2} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Karena $LU = A$, maka hasil perkalian L dan U itu dapat ditulis sebagai

$$LU = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix} = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Dari kesamaan dua buah matriks $LU = A$, diperoleh

$$u_{11} = a_{11}, \quad u_{12} = a_{12}, \quad u_{13} = a_{13} \quad \} \text{ Baris pertama } U$$

$$\begin{aligned} l_{21}u_{11} = a_{21} &\rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} \\ l_{31}u_{11} = a_{31} &\rightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} \end{aligned} \quad \} \text{ Kolom pertama } L$$

$$\begin{aligned} l_{21}u_{12} + u_{22} = a_{22} &\rightarrow u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} \\ l_{21}u_{13} + u_{23} = a_{23} &\rightarrow u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} \end{aligned} \quad \} \text{ Baris kedua } U$$

$$l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = a_{32} \rightarrow l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} \quad \text{Kolom kedua } L$$

$$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = a_{33} \rightarrow u_{33} = a_{33} - (l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23}) \quad \left. \vphantom{u_{33}} \right\} \begin{array}{l} \text{Baris} \\ \text{ketiga } U \end{array}$$

Kita perhatikan ada urutan pola teratur (berselang-seling) dalam menemukan elemen-elemen L dan U , yaitu:

- (1) hitung elemen-elemen baris pertama dari U
- (2) hitung elemen-elemen kolom pertama dari L
- (3) hitung elemen-elemen baris kedua dari U
- (4) hitung elemen-elemen kolom kedua L
- (5) ... dst
- (...) hitung elemen-elemen baris ke- k dari U
- (...) hitung elemen-elemen kolom ke- k dari L

Rumus umum menghitung u dan l untuk sistem dengan matriks A yang berukuran 3×3 dapat ditulis sebagai berikut:

$$u_{pj} = a_{pj} - \sum_{k=1}^{p-1} l_{pk} u_{kj}, \quad \begin{array}{l} p = 1, 2, 3, \dots, n \\ j = p, p+1, \dots, n \end{array} \quad (\text{P.4.13})$$

dan

$$l_{iq} = \frac{a_{iq} - \sum_{k=1}^{q-1} l_{ik} u_{kq}}{u_{qq}}, \quad \begin{array}{l} q = 1, 2, 3, \dots, n-1 \\ i = q+1, q+2, \dots, n \end{array} \quad (\text{P.4.14})$$

dengan syarat $u_{qq} \neq 0$

Contoh 4: Selesaikan SPL

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$$

dengan metode dekomposisi LU , yang dalam hal ini L dan U dihitung dengan metode reduksi Crout.

Penyelesaian:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Diperoleh:

$$u_{11} = a_{11} = 1$$

$$u_{12} = a_{12} = 1$$

$$u_{13} = a_{13} = -1$$

← elemen-elemen baris pertama U

$$l_{21} = a_{21}/u_{11} = 2/1 = 2$$

$$l_{31} = a_{31}/u_{11} = -1/1 = -1$$

← elemen-elemen kolom pertama U

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 2 - 2 \cdot 1 = 0 \quad \leftarrow \text{elemen-elemen baris kedua U}$$

Karena u_{qq} tidak boleh nol, lakukan pertukaran baris, baik untuk matriks A maupun untuk vektor b :

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Matriks } A & \text{Vektor } b \\
 R_2 \Leftrightarrow R_3 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} & R_2 \Leftrightarrow R_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Hitung kembali nilai l_{21} , l_{31} , dan u_{22} (Perhatikan bahwa nilai u_{11} , u_{12} , u_{13} tidak berubah)

$$\begin{aligned}
 l_{21} &= a_{21}/u_{11} = -1/1 = -1 \\
 l_{31} &= a_{31}/u_{11} = 2/1 = 2
 \end{aligned}
 \quad \leftarrow \text{elemen-elemen kolom pertama L}$$

$$\begin{aligned}
 u_{22} &= a_{22} - l_{21}u_{12} = 1 - (-1)(1) = 1 + 1 = 2 \\
 u_{23} &= a_{23} - l_{21}u_{13} = 1 - (-1)(-1) = 1 - 1 = 0
 \end{aligned}
 \quad \leftarrow \text{elemen-elemen baris kedua U}$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} = \frac{2 - 2(1)}{2} = 0 \quad \leftarrow \text{elemen-elemen kolom kedua L}$$

Diperoleh L dan U sebagai berikut,

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Berturut-turut dihitung y dan x sebagai berikut:

$$Ly = b \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

y_1 , y_2 , dan y_3 dihitung dengan teknik penyulihan maju:

$$y_1 = 1$$

$$-y_1 + y_2 = 1 \quad \rightarrow \quad y_2 = 1 + y_1 = 1 + 1 = 2$$

$$2y_1 + 0y_2 + y_3 = 5 \quad \rightarrow \quad y_3 = 5 - 2y_1 = 3$$

$$Ux = y \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

x_1 , x_2 , dan x_3 dihitung dengan teknik penyulihan mundur:

$$3x_3 = 3 \quad \rightarrow x_3 = 1$$

$$2x_2 + 0x_3 = 2 \quad \rightarrow x_2 = 1$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1 \quad \rightarrow x_1 = 1$$

Jadi, solusi sistem persamaan linier di atas adalah $x = (1, 1, 1)^T$.

Dekomposisi LU adalah metode yang kompak

- Jika diamati elemen segitiga bawah pada matriks U semuanya bernilai nol, sehingga ruang yang tidak terpakai itu dapat dipakai untuk menyimpan elemen matriks L .
- Elemen diagonal matriks L seluruhnya 1, jadi tidak perlu disimpan (*default*). Dengan demikian, penyimpanan elemen L dan U pada satu matriks dapat menghemat penggunaan memori.
- Selain itu, matriks A hanya dipakai sekali untuk memperoleh L dan U , sesudah itu tidak dipakai lagi.

- Dengan demikian, setelah L dan U diperoleh, elemennya dapat dipindahkan ke dalam A .
- Karena alasan ini, maka metode dekomposisi LU dinamakan juga metode kompaksi memori.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix}$$

L U

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -0.5 & -2.5 & 4.5 \\ 0.25 & -0.5 & 8 \end{bmatrix}$$

L dan U disatukan

Menghitung Determinan $A = LU$

- Determinan matriks A dapat dihitung dari perkalian determinan matriks L dan determinan matriks U .

Kasus 1: Jika di dalam metode LU-Gauss tidak ada pertukaran baris

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(LU) \\ &= \det(L) \times \det(U) \\ &= (1) \times \det(U) \\ &= \det(U) \\ &= u_{11} u_{22} u_{33} \cdots u_{nn}\end{aligned}$$

Keterangan: $\det(L) = 1$ sebab semua elemen diagonal L adalah satu.

Kasus 2: Jika di dalam metode LU-Gauss terdapat pertukaran baris

- Jika terdapat operasi pertukaran baris, maka dekomposisi LU dengan operasi pertukaran baris setara dengan mengerjakan dua proses terpisah berikut:

1. Pertukaran baris dapat dipandang sebagai transformasi matriks A menjadi matriks A' dengan cara permutasi baris-baris matriks (sama dengan mengalikan A dengan matriks permutasi P),

$$A' = PA \quad \text{atau setara dengan} \quad A = P^{-1} A'$$

2. Dekomposisi A' menjadi LU tanpa operasi pertukaran baris

$$A' = LU$$

- Dari (1) dan (2), L dan U dihubungkan dengan A oleh

$$A = P^{-1} A' = P^{-1} LU$$

- Determinan A dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(P^{-1}) \times \det(L) \times \det(U) \\ &= \det(P^{-1}) \times 1 \times \det(U) \\ &= \det(P^{-1}) \times \det(U) \\ &= \alpha \det(U) \end{aligned}$$

yang dalam hal ini $\alpha = \det(P^{-1}) = -1$ atau 1 bergantung pada apakah pertukaran baris dilakukan sejumlah bilangan ganjil atau genap.

- Jika terjadi pertukaran baris sejumlah p kali, maka α dapat ditulis sebagai:

$$\alpha = (-1)^p$$

- α bernilai 1 untuk p genap dan -1 untuk p ganjil. Karena itu,

$$\det(A) = (-1)^p \det(U) = (-1)^p u_{11} u_{22} u_{33} \dots u_{nn}$$

- Jika di dalam operasi baris elementer terdapat perkalian baris-baris matriks dengan k_1, k_2, \dots, k_m , maka

$$\det(A) = \frac{(-1)^p u_{11} u_{22} \dots u_{nn}}{k_1 k_2 \dots k_m}$$

Contoh 5: Hitung determinan matriks A berikut berdasarkan dekomposisi LU:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_3 - 1/2 R_2 \\ R_3 - 1/2 R_1 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Tidak ada proses pertukaran baris selama eliminasi Gauss, maka

$$\det(A) = (2) (-2) (-5) = 20$$

Latihan (Kuis 2022)

- a) Selesaikan SPL $Ax = b$ berikut dengan metode dekomposisi LU. Metode pemfaktorkan A menjadi L dan U yang digunakan adalah metode reduksi Crout.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- b) Tuliskan A sebagai hasil kali L dan U , verifikasi hasil perkaliannya.

(Jawaban sesudah halaman ini)

Jawaban:

$$u_{11} = a_{11}, \quad u_{12} = a_{12}, \quad u_{13} = a_{13} \quad \} \text{ Baris pertama } U$$

$$\begin{aligned} l_{21}u_{11} = a_{21} &\rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} \\ l_{31}u_{11} = a_{31} &\rightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} \end{aligned} \quad \} \text{ Kolom pertama } L$$

$$\begin{aligned} l_{21}u_{12} + u_{22} = a_{22} &\rightarrow u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} \\ l_{21}u_{13} + u_{23} = a_{23} &\rightarrow u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} \end{aligned} \quad \} \text{ Baris kedua } U$$

$$l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = a_{32} \rightarrow l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} \quad \text{Kolom kedua } L$$

$$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = a_{33} \rightarrow u_{33} = a_{33} - (l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23}) \quad \} \text{ Baris ketiga } U$$

$$u_{11} = a_{11} = 2, u_{12} = a_{12} = 2, u_{13} = a_{13} = -2$$

$$l_{21} = a_{21}/u_{11} = 4/2 = 2$$

$$l_{31} = a_{31}/u_{12} = -2/2 = -1$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 4 - (2)(2) = 0 \rightarrow \text{tidak boleh nol}$$

Pertukarkan baris kedua dengan ketiga:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ulang lagi menghitung l_{21} , l_{31} , dan u_{22}

$$l_{21} = a_{21}/u_{11} = -2/2 = -1$$

$$l_{31} = a_{31}/u_{12} = 4/2 = 2$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 2 - (-1)(2) = 4$$

$$u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = 4 - (-1)(-2) = 2$$

$$l_{32} = (a_{32} - l_{31}u_{12})/u_{22} = (4 - (2)(2))/4 = 0/4 = 0$$

$$u_{33} = a_{33} - (l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23}) = 1 - ((2)(-2) - (0)(2)) = 5$$

Jadi,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Solusi SPL:

$$Ly = b \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 5$$

$$y_2 = -1 + y_1 = -1 + 5 = 4$$

$$y_3 = -2y_1 = (-2)(5) = -10$$

$$Ux = y \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$5x_3 = -10 \rightarrow x_3 = -2$$

$$4x_2 + 2x_3 = 4 \rightarrow x_2 = (4 - 2x_3)/4 = (4 + 4)/4 = 2$$

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5 \rightarrow x_1 = (5 - 2x_2 + 2x_3)/2 = (5 - 4 - 4)/2 = -1,5$$

Solusi $(x_1, x_2, x_3) = (-1.5, 2, -2)$

$$\text{b) } LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} = A \text{ yang sudah dipertukarkan baris}$$

Soal Latihan

1. Faktorkan matriks A berikut menjadi $A = LU$

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -4 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

lalu gunakan L dan U untuk menyelesaikan SPL:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= -3 \\ 2x_1 + 6x_3 &= -22 \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$$

2. Selesaikan SPL-SPL berikut menggunakan dekomposisi LU

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} -3 & 12 & -6 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 3 & 10 & -10 \\ -2 & -4 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$$