

Seri bahan kuliah Algeo #17 - 2023

Ruang Vektor Umum

(bagian 3)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Sumber:

Howard Anton & Chris Rores, *Elementary Linear Algebra, 10th Edition*

Ruang Baris, Ruang Kolom, dan Ruang Null

- Misalkan A adalah matriks $m \times n$ sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Kita dapat membentuk dari matriks A:
 - (1) **Vektor baris**: vektor yang dibentuk dari baris-baris matriks
 - (2) **Vektor kolom**: vektor yang dibentuk dari kolom-kolom matriks

- Vektor-vektor baris dari matriks A:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= [a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}] \\ \mathbf{r}_2 &= [a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}] \\ \vdots & & & & \vdots \\ \mathbf{r}_m &= [a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}] \end{aligned}$$



vektor-vektor di \mathbb{R}^n

- Vektor-vektor kolom dari matriks A:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \quad \mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$



vektor-vektor di \mathbb{R}^m

Contoh 1: Diberikan matriks A sebagai berikut $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 6 & 9 & -3 \\ 0 & 4 & -1 & 10 \end{bmatrix}$

Vektor-vektor barisnya adalah

$$\mathbf{r}_1 = [3 \quad -1 \quad 4 \quad 7]$$

$$\mathbf{r}_2 = [2 \quad 6 \quad 9 \quad -3]$$

$$\mathbf{r}_3 = [0 \quad 4 \quad -1 \quad 10]$$

Vektor-vektor kolomnya adalah

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

DEFINISI

- Jika A adalah matriks $m \times n$, maka subruang dari \mathbb{R}^n yang dibangun oleh vektor-vektor baris dari A dinamakan **ruang baris** (*row space*) matriks A .
- Subruang dari \mathbb{R}^m yang dibangun oleh vektor-vektor kolom dari A dinamakan **ruang kolom** (*column space*) matriks A .
- Ruang solusi sistem persamaan linier homogen $A\mathbf{x} = 0$, yang merupakan subruang dari \mathbb{R}^n , dinamakan **ruang null** (*null space*) matriks A .

Contoh 2 (Ruang null): Tentukan ruang null untuk matriks A berikut

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Jawaban: Untuk menentukan ruang null, selesaikan SPL homogen $A\mathbf{x} = 0$ berikut

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dengan metode eliminasi Gauss/Gauss-Jordan, diperoleh solusinya sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{atau dinyatakan sebagai } \mathbf{x} = s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2$$

yang dalam hal ini, $\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 0, 0, 0)$ dan $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, -1, 0, 1)$

Ruang solusi yang dibentuk oleh \mathbf{v}_1 dan \mathbf{v}_2 disebut ruang null

Teorema. Sebuah SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ disebut **konsisten** jika dan hanya jika \mathbf{b} adalah kombinasi linier dari vektor-vektor kolom matriks A , dengan kata lain \mathbf{b} berada di dalam ruang kolom matriks A .

Contoh 3: Tinjau SPL berikut ini

$$\begin{array}{l} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -9 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Solusinya dengan metode eliminasi Gauss adalah $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$. Solusi ini dapat dinyatakan sebagai

$$2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

Jadi, \mathbf{b} merupakan kombinasi linier dari vektor-vektor kolom matriks A

Basis untuk Ruang Baris, Ruang Kolom, dan Ruang Null

- Misalkan A adalah matrik berukuran $m \times n$.
- Bagaimana menentukan basis untuk ruang baris, ruang kolom, dan ruang null dari matriks A ?
- Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:
 1. Lakukan reduksi baris pada A dengan menerapkan OBE sampai menghasilkan matriks eselon baris R
 2. Basis untuk ruang baris dari A adalah semua vektor baris yang mengandung 1 utama pada matriks R
 3. Basis untuk ruang kolom dari A adalah semua vektor kolom dari matriks A yang berkoresponden dengan vektor kolom matriks R yang mengandung 1 utama.
- Basis untuk ruang null adalah vektor-vektor yang membangun ruang solusi SPL homogen $Ax = 0$

Contoh 4: Tentukan basis untuk ruang baris, basis untuk ruang kolom, dan basis untuk ruang null dari matriks A berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

Jawaban: Lakukan reduksi baris pada matriks A dengan operasi baris elementer sbb:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\dots]{\text{OBE}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Basis untuk ruang baris adalah semua baris matriks R yang mengandung 1 utama:

$$\mathbf{r}_1 = [1 \quad -3 \quad 4 \quad -2 \quad 5 \quad 4]$$

$$\mathbf{r}_2 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 3 \quad -2 \quad -6]$$

$$\mathbf{r}_3 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 5]$$



Dimensi ruang baris = 3

Basis untuk ruang kolom adalah semua kolom dari matriks A yang berkoresponden dengan kolom matriks R yang mengandung 1 utama:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Jadi, basis untuk ruang kolom adalah

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad c_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix} \quad c_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \text{Dimensi ruang kolom} = 3$$

Dimensi ruang baris = dimensi ruang kolom

Untuk menemukan basis ruang null, tentukan solusi $A\mathbf{x} = 0$ sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{OBE}} \dots \xrightarrow{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matriks augmented

Dari matriks augmented yang terakhir diperoleh tiga persamaan sbb:

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 + 4x_6 = 0 \quad \text{(i)}$$

$$x_3 + 3x_4 - 2x_5 - 6x_6 = 0 \quad \text{(ii)}$$

$$x_5 + 5x_6 = 0 \quad \text{(iii)}$$

Dari (iii) diperoleh: $x_5 = -5x_6$

Dari (ii) diperoleh: $x_3 = -3x_4 + 2x_5 + 6x_6 = -3x_4 + 2(-5x_6) + 6x_6 = -3x_4 - 4x_6$

Dari (i) diperoleh: $x_1 = -3x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 5x_5 - 4x_6 = -3x_2 - 4(-3x_4 - 4x_6) + 2x_4 - 5(-5x_6) - 4x_6 = -3x_2 + 14x_4 + 22x_6$

Misalkan $x_2 = r$, $x_4 = s$, dan $x_6 = t$, maka

$$x_1 = -3x_2 + 14x_4 + 22x_6 = -3r + 14s + 22t$$

$$x_3 = -3x_4 - 4x_6 = -3s - 4t$$

$$x_5 = -5t$$

Solusi $A\mathbf{x} = 0$ dinyatakan dalam bentuk vektor sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3r + 14s + 22t \\ r \\ -3s - 4t \\ s \\ -5t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3r \\ r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14s \\ 0 \\ -3s \\ s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 22t \\ 0 \\ -4t \\ 0 \\ -5t \\ t \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 22 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis untuk ruang null adalah:

$$\mathbf{v}_1 = (-3, 1, 0, 0, 0, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (14, 0, -3, 1, 0, 0), \quad \text{dan} \quad \mathbf{v}_3 = (22, 0, -4, 0, -5, 0)$$

Dimensi ruang null = 3

- Kita juga dapat menemukan basis untuk ruang vector di R^n dengan menggunakan operasi baris elementer. Perhatikan contoh 5 di bawah ini.

Contoh 5: Tentukan basis untuk subruang dari R^5 yang dibangun oleh vektor-vektor $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 0, 0, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -5, -3, -2, 6)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 5, 15, 10, 0)$, dan $\mathbf{v}_4 = (2, 6, 18, 8, 6)$

Jawaban:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} \text{OBE} \\ \dots \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Basis adalah semua baris dari R yang mengandung 1 utama, yaitu:

$$\mathbf{w}_1 = (1, -2, 0, 0, 3), \quad \mathbf{w}_2 = (0, 1, 3, 2, 0), \quad \text{dan} \quad \mathbf{w}_3 = (0, 0, 1, 1, 0)$$

Dimensi = 3

Rank dan Nullity

- *Rank* matriks A , ditulis sebagai $rank(A)$, didefinisikan sebagai dimensi ruang baris atau dimensi ruang kolom dari matriks A .
- Ingat kembali bahwa dimensi ruang baris = dimensi ruang kolom
- *Nullity* matriks A , ditulis sebagai $nullity(A)$, didefinisikan sebagai dimensi ruang null dari matriks A .
- Untuk matriks A dengan n kolom, berlaku hubungan sbb:

$$rank(A) + nullity(A) = n$$

- Rank matriks A juga dapat diartikan juga sebagai
 - = jumlah baris tidak-nol pada matriks eselon dari hasil reduksi baris matriks A .
 - = jumlah variabel utama (variable non-parameter) pada solusi umum $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- Nullity matriks A dapat diartikan sebagai jumlah parameter di dalam solusi umum $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

THEOREM 4.8.3 *If A is an $m \times n$ matrix, then*

- (a) *$\text{rank}(A) = \text{the number of leading variables in the general solution of } A\mathbf{x} = \mathbf{0}.$*
- (b) *$\text{nullity}(A) = \text{the number of parameters in the general solution of } A\mathbf{x} = \mathbf{0}.$*

Contoh 6: Tinjau kembali matriks A pada Contoh 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

Ukuran matriks A adalah 4×6 ($m = 4, n = 6$). Sudah dihitung pada Contoh 4 bahwa dimensi ruang baris = 3, dimensi ruang kolom = 3, dan dimensi ruang null = 3, maka

$$\text{rank}(A) = 3$$

$$\text{nullity}(A) = 3$$

$$\text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = n \rightarrow 3 + 3 = 6$$

Contoh 17: Tentukan *rank* dan *nullity* matriks A berikut

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Jawaban:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{OBE} \\ \sim \\ \dots \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rank(A) juga dapat dihitung dari jumlah baris tidak-nol pada matriks hasil OBE. Ada dua baris tidak-nol pada matriks hasil OBE di atas, maka $\text{rank}(A) = 2$.

Nullity dihitung sbb: $\text{nullity}(A) = n - \text{rank}(A) = 6 - 2 = 4$

Untuk membuktikan bahwa $nullity(A) = 4$, maka selesaikan terlebih dahulu $A\mathbf{x} = 0$,

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 & 0 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 & 0 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{OBE}} \dots \xrightarrow{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks *augmented* yang terakhir diperoleh dua persamaan sbb:

$$x_1 - 4x_3 - 28x_4 - 37x_5 + 13x_6 = 0 \quad (\text{i})$$

$$x_2 - 2x_3 - 12x_4 - 16x_5 + 5x_6 = 0 \quad (\text{ii})$$

Dari (ii) diperoleh: $x_2 = 2x_3 - 12x_4 + 16x_5 - 5x_6$

Dari (i) diperoleh: $x_1 = 4x_3 + 28x_4 + 37x_5 - 13x_6$

Misalkan $x_3 = r$, $x_4 = s$, $x_5 = t$, $x_6 = u$, maka solusi $A\mathbf{x} = 0$ dinyatakan sebagai vektor:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4r + 28s + 37t - 13u \\ 2r + 12s + 16t - 5u \\ r \\ s \\ t \\ u \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 28 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 37 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -13 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis untuk ruang null adalah:

$$\mathbf{v}_1 = (4, 2, 1, 0, 0, 0), \mathbf{v}_2 = (28, 12, 0, 0, 1, 0), \mathbf{v}_3 = (37, 16, 0, 0, 1, 0), \text{ dan} \\ \mathbf{v}_4 = (-13, -5, 0, 0, 0, 1)$$

Dimensi ruang null = 4, sehingga $\text{nullity}(A) = 4$

$\text{Nullity}(A) = 4$ juga berarti jumlah parameter pada solusi umum $Ax = 0$ adalah 4 (pada kasus ini parameter solusi adalah $r, s, t,$ dan $u,$ semuanya elemen bilangan riil)

THEOREM 4.8.4 Equivalent Statements

If A is an $n \times n$ matrix, then the following statements are equivalent.

- (a) A is invertible.
- (b) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ has only the trivial solution.
- (c) The reduced row echelon form of A is I_n .
- (d) A is expressible as a product of elementary matrices.
- (e) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is consistent for every $n \times 1$ matrix \mathbf{b} .
- (f) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has exactly one solution for every $n \times 1$ matrix \mathbf{b} .
- (g) $\det(A) \neq 0$.
- (h) The column vectors of A are linearly independent.
- (i) The row vectors of A are linearly independent.
- (j) The column vectors of A span \mathbb{R}^n .
- (k) The row vectors of A span \mathbb{R}^n .
- (l) The column vectors of A form a basis for \mathbb{R}^n .
- (m) The row vectors of A form a basis for \mathbb{R}^n .
- (n) A has rank n .
- (o) A has nullity 0 .

Latihan (Kuis 2022)

1. Diberikan sebuah matrik A sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -7 & 0 & -6 \\ -1 & 3 & -2 & 1 & -3 \\ -3 & 8 & -9 & 1 & -9 \end{bmatrix}$$

- Tentukan basis dari ruang baris dan basis dari ruang kolom
- Tentukan basis dari ruang baris dengan membentuk terlebih dahulu A^T
(basis-basis nya terdiri dari vector-vektor baris semula)
- Tentukan $\text{rank}(A)$ dan $\text{nullity}(A)$

Jawaban:

Dengan OBE diperoleh matrik eselon sbb:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 11 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

a). Basis dari ruang baris adalah

$$r_1 = (1 \ 0 \ 11 \ 0 \ 3) \quad \text{bisa juga } r_1 = (1 \ -2 \ 5 \ 0 \ 3)$$

$$r_2 = (0 \ 1 \ 3 \ 0 \ 0) \quad \text{bisa juga } r_2 = (-2 \ 5 \ -7 \ 0 \ -6)$$

$$r_3 = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0) \quad \text{bisa juga } r_3 = (-1 \ 3 \ -2 \ 1 \ -3)$$

$r_1, r_2,$ dan r_3 boleh dikembalikan ke baris-baris semula pada matriksnya

Basis dari ruang kolom adalah: (HARUS dikembalikan ke matriks semula)

$$c_1 = (1 \ -2 \ -1 \ -3)^T$$

$$c_2 = (-2 \ 5 \ 3 \ 8)^T$$

$$c_4 = (0 \ 0 \ 1 \ 1)^T$$

b). Matriks semula di transpose kemudian dibentuk matriks eselon di peroleh

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Basis ruang kolom dari matriks transpose diatas adalah

$$c1 = (1 \ -2 \ 5 \ 0 \ 3)$$

$$c2 = (-2 \ 5 \ -7 \ 0 \ -6)$$

$$c3 = (-1 \ 3 \ -2 \ 1 \ -3)$$

$c1, c2$ dan $c3$ sama dengan jawaban pertanyaan a). tetapi dengan cara lain.

$$c) \text{rank}(A) = 3, \text{nullity}(A) = n - \text{rank}(A) = 5 - 3 = 2$$

Latihan

1. (soal kuis tahun 2019)

Diberikan matriks berukuran 3x3 sbb :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

- Basis dari ruang kolom
- Basis dari ruang baris
- Basis dari ruang null