Seri bahan kuliah Algeo #11 – Update 2023

Vektor di Ruang Euclidean
(bagian 1)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Definisi Vektor

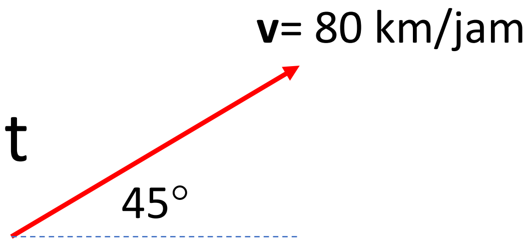
- Kuantitas fisik dapat direpresentasikan dalam dua jenis: skalar dan vektor

- Skalar: nilai numerik yang menyatakan besaran kuantitas fisik tersebut

  Contoh: temperatur 15° C, laju kendaraan 75 km/jam, panjang 2,5 m

- Vektor: kuantitas fisik yang memiliki besar dan arah

  Contoh: kecepatan (**v**) mobil 80 km/jam ke arah timur laut



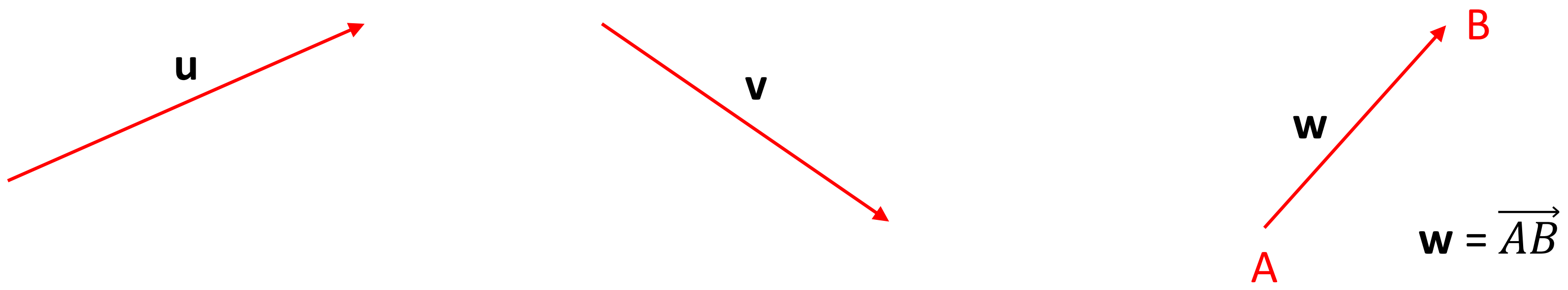
Notasi vektor

- Vektor dilambangkan dengan huruf-huruf kecil (dicetak tebal) atau memakai tanda panah (jika berupa tulisan tangan)

  Contoh, **u**, **v**, **w**, … atau $\overrightarrow{u}, \vec{v}, \overrightarrow{w}$, …

  a, **b**, **c**, …

- Secara geometri, vektor di ruang dwimatra (2D) dinyatakan sebagai garis berarah

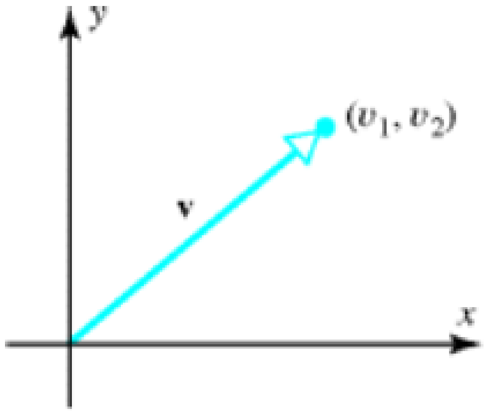


Ruang Vektor

- Ruang vektor (*vector space*): ruang tempat vektor didefinisikan
- Disebut juga ruang Euclidean
- R^2, R^3, R^n

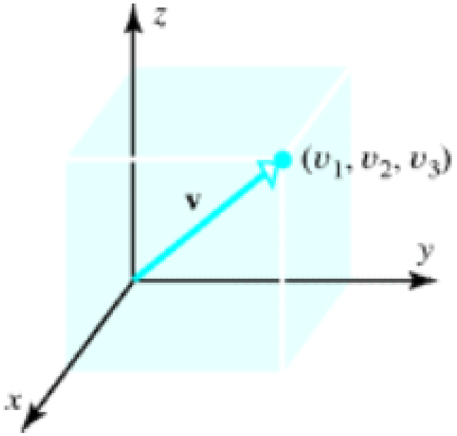
Vektor di R^2

$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ atau $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$



Vektor di R^3

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ atau $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$



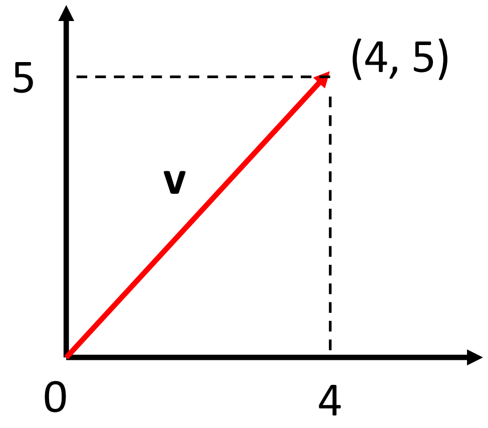
Vektor di R^n:

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \text{ atau } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

(tidak ada gambaran geometri vektor di R^n)

- Semua vektor yang ditulis sebagai $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, atau $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ berawal dari **titik asal** O.

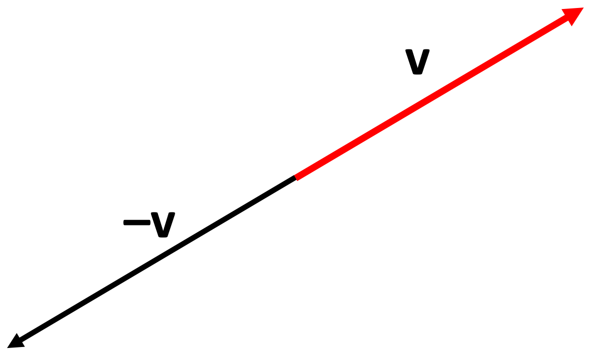
- Titik asal vektor di R^2 adalah (0, 0)
- Titik asal vektor di R^3 adakah (0, 0, 0)
- Titik asal vector di R^n adalah (0, 0, …, 0)



$\mathbf{v}$ = (4, 5)

- Vektor nol adalah vektor yang semua komponennya 0
  - Vektor nol dilambangkan dengan **0**
  - Vektor 0 di R^2: $\mathbf{0} = (0, 0)$
  - Vektor 0 di R^3: $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$
  - Vektor 0 di R^n: $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$

- Negatif dari vektor **v** dilambangkan dengan **–v**



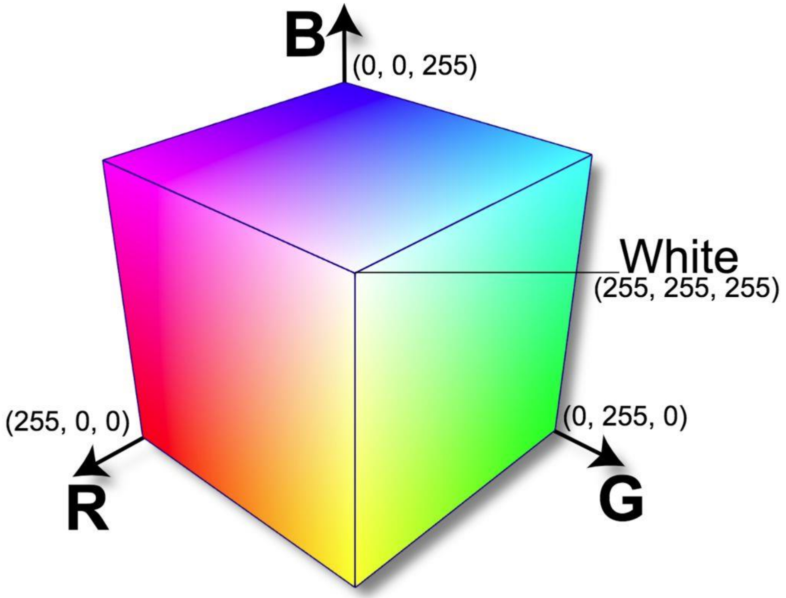
Contoh-contoh vektor:

(i) **u** = (4, 5) → vektor di R^2

(ii) **v** = (–2, 3, 10) → vektor di R^3

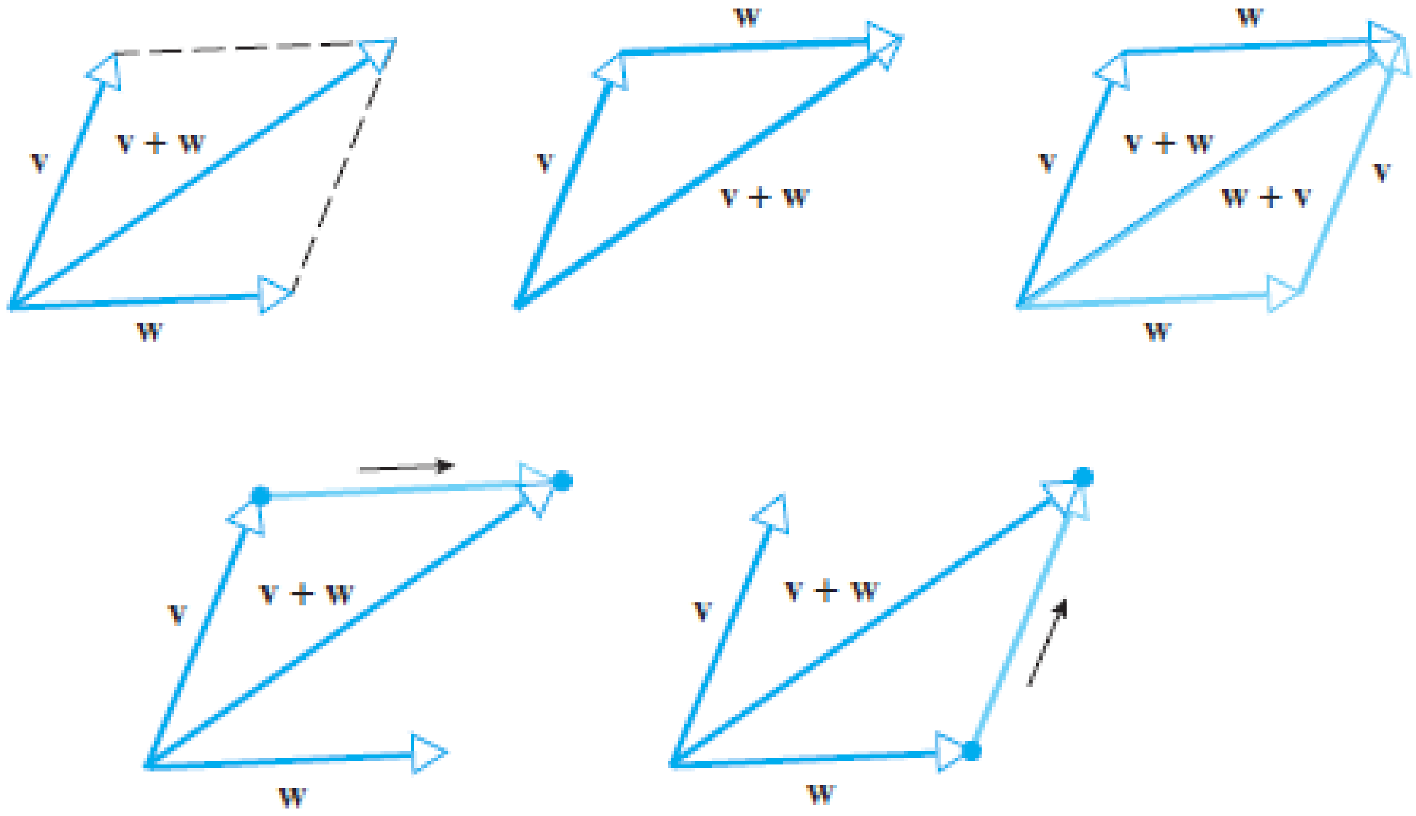
(iii) **w** = (1, –5, 0, 7, 8) → vector di R^5

(iv) **c** = (r, g, b) → warna di dalam model RGB (red-green-blue)



Penjumlahan dua vektor

- Menggunakan kaidah parallelogram atau kaidah segitiga



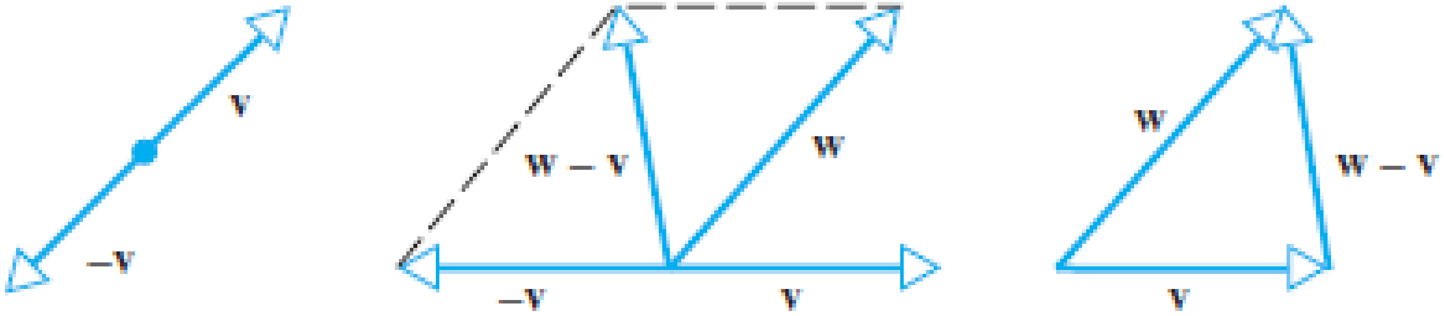
- Jika $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$
  maka $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n)$

- **Contoh 1:** Misalkan $\mathbf{v} = (3, -1, 4)$ dan $\mathbf{w} = (4, 0, 8)$ maka

$$v + w = (3 + 4, -1 + 0, 4 + 8) = (7, -1, 12)$$

Pengurangan dua vektor

$$\mathbf{w} - \mathbf{v} = \mathbf{w} + (-\mathbf{v})$$



- Jika $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$

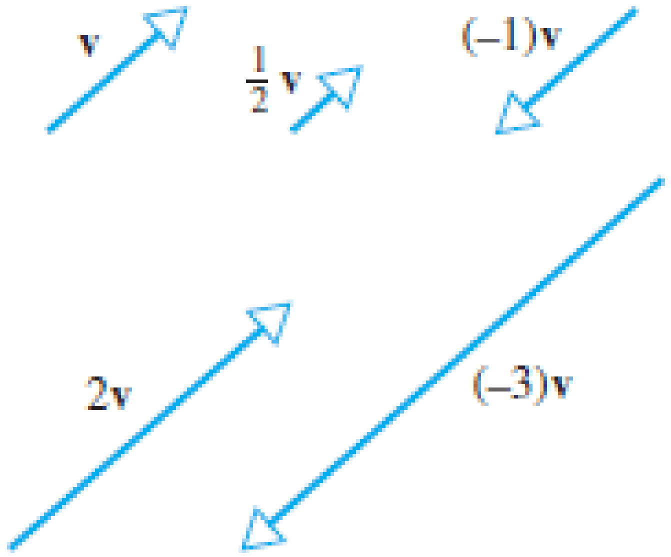
  maka $\mathbf{v} - \mathbf{w} = (v_1 - w_1, v_2 - w_2, \ldots, v_n - w_n)$

- **Contoh 2:** Misalkan $\mathbf{v} = (3, -1, 4)$ dan $\mathbf{w} = (4, 0, 8)$ maka

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = (3 - 4, -1 - 0, 4 - 8) = (-1, -1, -4)$$

Perkalian vektor dengan skalar

k**v** = vektor yang panjangnya |k| kali Panjang **v**

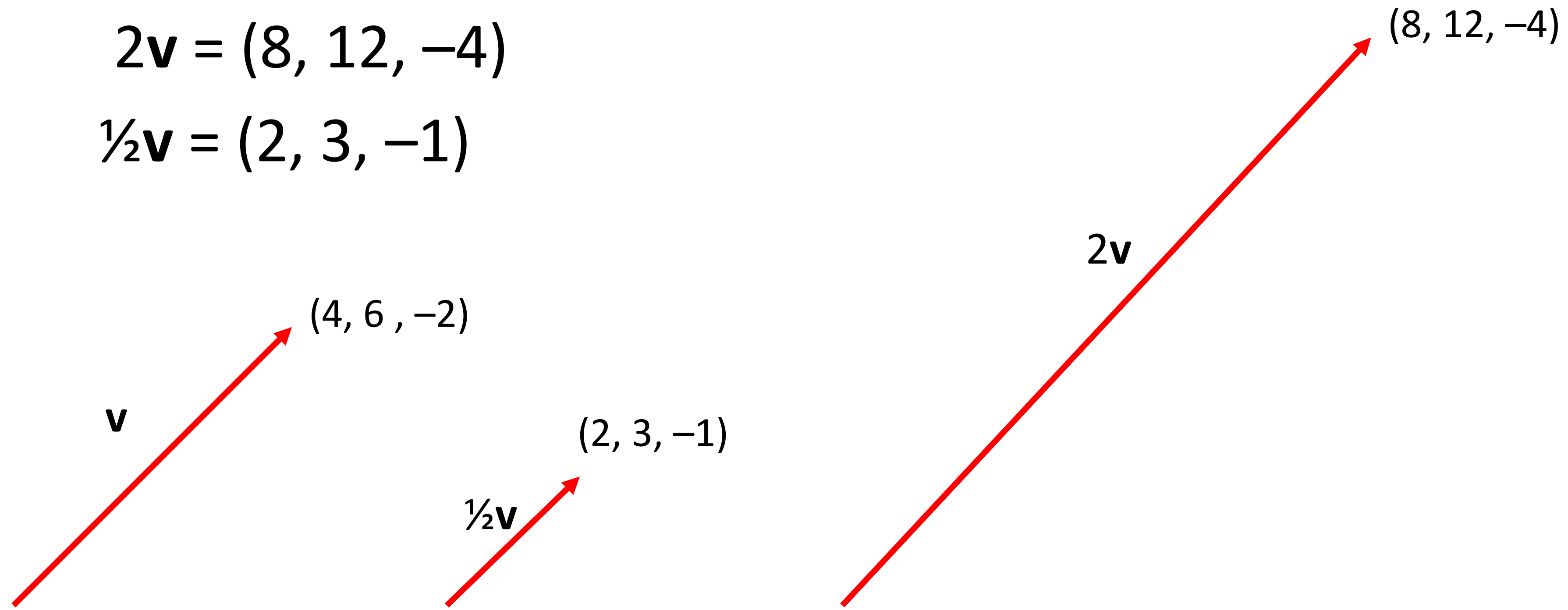


- Jika $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ maka $k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, \ldots, kv_n)$

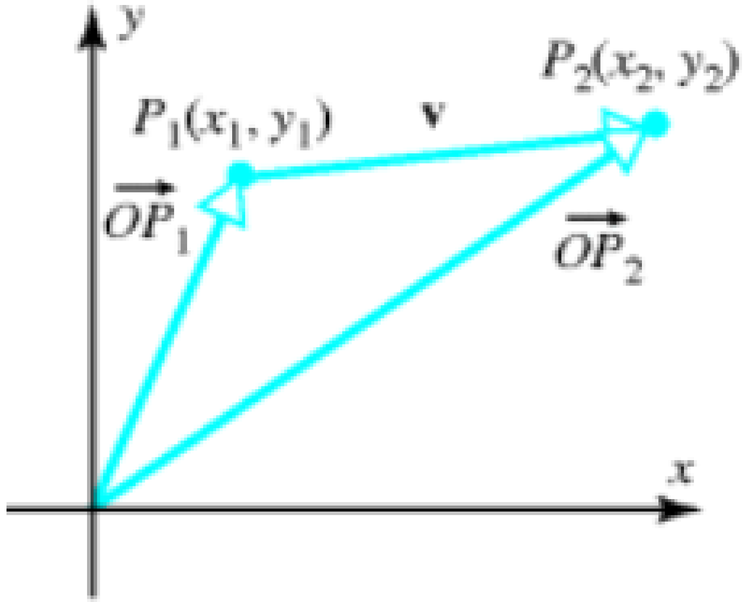
- **Contoh 3:** Misalkan $\mathbf{v} = (4, 6, -2)$ maka

$$2\mathbf{v} = (8, 12, -4)$$

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{v} = (2, 3, -1)$$



Vektor yang tidak berawal dari titik asal



Di R^2 : Misalkan $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2)$, maka

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$$
$$= (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$$
$$= (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Di R^3 : Misalkan $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$, maka

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Contoh 4: Misalkan $P_1(2, -1, 4)$ dan $P_2(7, 5, -8)$, maka

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (7 - 2, 5 - (-1), -8 - 4) = (5, 6, -12)$$

Norma sebuah vektor

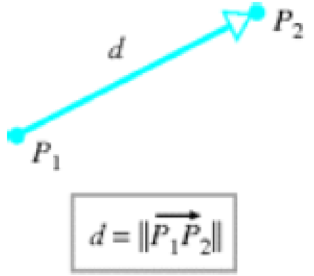
- Panjang (atau *magnitude*) sebuah vektor **v** dinamakan **norma** (*norm*) **v**.
- Norma vektor **v** dilambangkan dengan $\|\mathbf{v}\|$.
- Norma sebuah vektor dinamakan juga **norma Euclidean**.

- Norma vektor **v** = (v_1, v_2) di R^2 adalah $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

- Norma vektor **v** = (v_1, v_2, v_3) di R^3adalah $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

- Norma vektor **v** = (v_1, v_2, …, v_n) di R^n adalah $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$

- Jika $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2)$ adalah dua titik di R^2 maka jarak (*d*) kedua titik tersebut adalah norma vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$:



$$d = \left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- Jika $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$ adalah dua titik di R^3 maka jarak (*d*) kedua titik tersebut adalah norma vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$d = \left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ adalah dua titik di R^n maka jarak (*d*) kedua titik tersebut adalah $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2}$$

Contoh 5:

(i) Misalkan **v** = (6, –2 , 3), maka norma vektor **v** adalah

$\|\mathbf{v}\|=\sqrt{6^2+(-2)^2+(3)^2}=\sqrt{36+4+9}=\sqrt{49}=7$

(ii) Jika $P_1(2, -1, -5)$ dan $P_2(4, -3, 1)$ maka jarak kedua titik adalah

$d=\|\overrightarrow{P_1P_2}\|=\sqrt{(4-2)^2+(-3-(-1))^2+(1-(-5))^2}$

$=\sqrt{4+4+36}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$

(iii) Misalkan **u** = (1, 3, –2, 7) dan **v** = (0, 7, 2, 2) adalah dua titik di R^4

maka jarak antara **u** dan **v** adalah:

$d(\mathbf{u},\mathbf{v})=\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|=\sqrt{(1-0)^2+(3-7)^2+(-2-2)^2+(7-2)^2}=\sqrt{58}$

Latihan (Kuis 2022)

Diketahui tiga buah vektor **u** = (–2 , –1, 4, 5), **v** = (3, 1, –5, 7), dan **w** = (–6, 2,1, 1).

Hitung:

$a)$ $\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$

$b)$ $\|-\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|\mathbf{w}\|$

$c)$ $\|3\mathbf{u}\|$ – $\|5\mathbf{v}\|$ – $\|-\mathbf{w}\|$

Jawaban:

$a)$ $3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}$ **=** 3(–2 , –1, 4, 5) – 5(3, 1, –5, 7) + (–6, 2,1, 1)

= (–6 , –3, 12, 15) – (15, 5, –25, 35) + (–6, 2,1, 1) = (–27, –6, 38, –19)

$\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ = $\sqrt{(-27)^2 + (-6)^2 + (38)^2(-19)^2}$ = $\sqrt{2570}$ = 50,69

b) $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ = (-5, -2, 9, -2)

$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$ = $\sqrt{114}$

$-\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|\mathbf{w}$ = -$\sqrt{114}$ (–6, 2,1, 1) = (6$\sqrt{114}$, -2$\sqrt{114}$, $\sqrt{114}$, $\sqrt{114}$)

$\|-\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|\mathbf{w}\|$ = $\sqrt{(6\sqrt{114})^2+(-2\sqrt{114})^2+(\sqrt{114})^2+(\sqrt{114})^2}$

= $\sqrt{4104+456+114+114}$ = $\sqrt{4788}$ = 69,196

c) 3$\mathbf{u}$ = 3(–2 , –1, 4, 5) = (–6 , –3, 12, 15), $\|3\mathbf{u}\|$ = 3$\sqrt{46}$

5$\mathbf{v}$ = 5(3, 1, –5, 7) = (15, 5, –25, 35), $\|5\mathbf{v}\|$ = 10$\sqrt{21}$

–$\mathbf{w}$ = –(–6, 2,1, 1) = (6, -2, -1, -1), $\|-\mathbf{w}\|$ = $\sqrt{42}$

$\|3\mathbf{u}\|$ – $\|5\mathbf{v}\|$ – $\|-\mathbf{w}\|$ = 3$\sqrt{46}$ - 10$\sqrt{21}$ - $\sqrt{42}$ = -31,96

Jarak Euclidean (*Euclidean distance*)

- Jarak dua vektor **u** = (u_1, u_2, …, u_n) dan **v** = (v_1, v_2, …, v_n) di R^n:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2}$$

sering dinamakan jarak Euclidean.

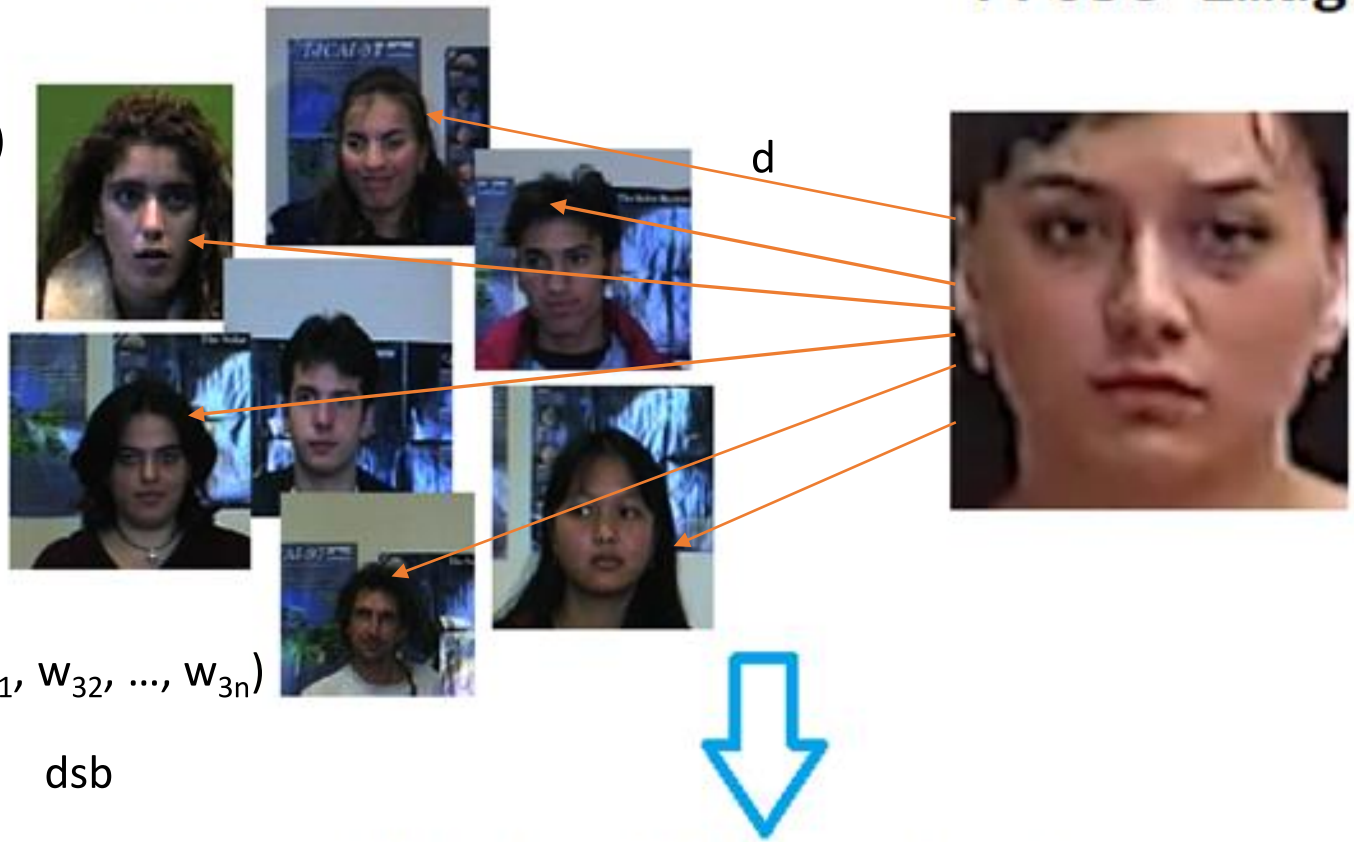
- Jarak Euclidean berguna untuk menentukan seberapa dekat (atau seberapa mirip) sebuah objek dengan objek lain (*object recognition*, *face recognition*, dsb).
- Misalkan terdapat sekumpulan objek 1, 2, …, m. Setiap objek direpesentasikan sebagai vektor fitur $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, …, $\mathbf{w}_m$. Setiap vektor memiliki n komponen.
- Untuk menentukan vektor $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, …, $\mathbf{w}_m$ mana yang paling mirip dengan vektor **z**, maka hitung jarak **z** ke setiap vektor $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, …, $\mathbf{w}_m$. Pilih jarak yang paling minimum, itulah vektor $\mathbf{w}_j$ yang paling mirip dengan vektor **z**, yang berarti objek yang paling mirip dengan objek **z**.

Identification

Face DB

Probe image

$\mathbf{w_1} = (w_{11}, w_{12}, \ldots, w_{1n})$



$\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$

$\mathbf{w_2} = (w_{21}, w_{22}, \ldots, w_{2n})$

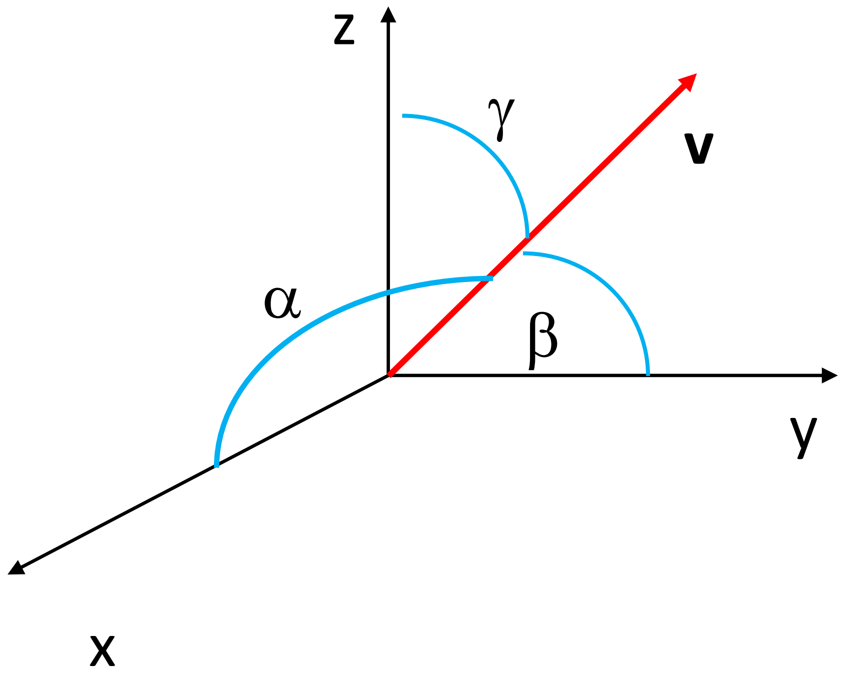
$\mathbf{w_3} = (w_{31}, w_{32}, \ldots, w_{3n})$

dsb

Who is this person?

Arah sebuah vektor

- Misalkan **v** = (v_1, v_2, v_3) adalah vektor di R^3 maka arah vektor **v** adalah



$$\cos \alpha = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}$$

$$\cos \beta = \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}$$

$$\cos \gamma = \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|}$$

Contoh: Misalkan **v** = (6, –2 , 3), maka norma vektor **v** adalah
$\|\mathbf{v}\|$=$\sqrt{6^2 + (-2)^2 + (3)^2}$= $\sqrt{36 + 4 + 9}$ = $\sqrt{49}$ = 7

Sudut **v** terhadap sumbu-x adalah: cos α = $\frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}$ = $\frac{6}{7}$ $\rightarrow$ α = 31°

Sudut **v** terhadap sumbu-y adalah: cos α = $\frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}$ = $\frac{-2}{7}$ $\rightarrow$ α = 106.6°

Sudut **v** terhadap sumbu-z adalah: cos α = $\frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|}$ = $\frac{3}{7}$ $\rightarrow$ α = 64.62°

Sifat-sifat aljabar vektor

THEOREM 3.1.1 *If* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, *and* $\mathbf{w}$ *are vectors in* R^n, *and if* k *and* m *are scalars, then:*

(*a*) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

(*b*) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

(*c*) $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$

(*d*) $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

(*e*) $k(\mathbf{u}+\mathbf{v})=k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$

(*f*) $(k+m)\mathbf{u}=k\mathbf{u}+m\mathbf{u}$

(*g*) $k(m\mathbf{u})=(km)\mathbf{u}$

(*h*) $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

Kombinasi linier vektor

- Sebuah vektor dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor lain.

  Contoh: $\mathbf{u} = 3\mathbf{v} + 2\mathbf{w} - 5\mathbf{x}$; $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, dan $\mathbf{x}$ adalah vektor-vektor di R^3

- Secara umum, jika $\mathbf{w}$ adalah vektor di R^n, maka $\mathbf{w}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_r}$ jika $\mathbf{w}$ dapat dinyatakan sebagai

$$\boxed{\mathbf{w} = k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + \ldots + k_r\mathbf{v_r}}$$

yang dalam hal ini $k_1, k_2, \ldots, k_r$ adalah skalar.

Contoh 1: Tentukan semua k_1, k_2, dan k_3 sehingga

$$k_1(1, 2, 3) + k_2(2, -3, 1) + k_3(3, 2, -1) = (6, 14, -2)$$

<u>Penyelesaian</u>:

$$k_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\14\\-2\end{bmatrix}$$

Diperoleh sistem persamaan linier (SPL):

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= 6 \\ 2k_1 - 3k_2 + 2k_3 &= 14 \\ 3k_1 + k_2 - k_3 &= -2 \end{aligned}$$

Selesaikan SPL di atas dengan metode eliminasi Gauss, diperoleh:

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = 3$$

Vektor satuan

- Vektor satuan (*unit vector*) adalah vektor dengan panjang = 1

- Dilambangkan dengan **u**
- Jika **v** adalah vektor di R^n dan $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ maka $\boxed{\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}}$ atau $\boxed{\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}}$
- Vektor **u** memilik arah yang sama dengan **v**
- Proses "membagi" sebuah vektor **v** dengan panjangnya dinamakan **menormalisasi vektor**.

  (sebenarnya bukan membagi, karena vektor tidak bisa dibagi)

Contoh 2: Misalkan **v** = (6, –2 , 3), maka norma vektor **v** adalah

$\|\mathbf{v}\|=\sqrt{6^2+(-2)^2+(3)^2}=\sqrt{36+4+9}=\sqrt{49}$ = 7 dan vektor satuannya:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{7}\ (6, -2\ ,3) = \left(\frac{6}{7}\ , -\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)$$

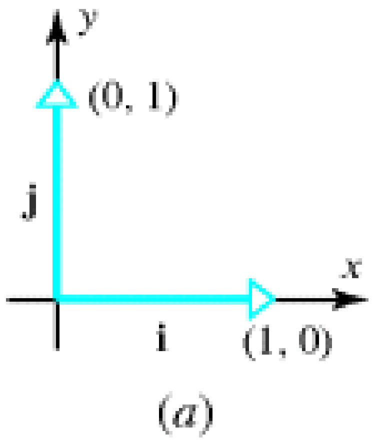
Periksa bahwa panjang **u** adalah satu,

$$\|\mathbf{u}\|= \sqrt{(6/7)^2+(-2/7)^2+(3/7)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{36}{49}+\frac{4}{49}+\frac{9}{49}}$$

$$= \sqrt{\frac{49}{49}} = 1$$

Vektor satuan standard

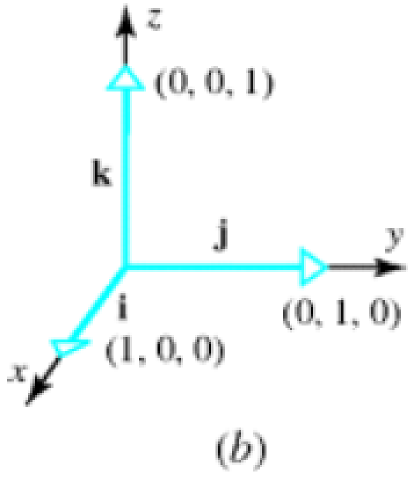


- Vektor satuan standard di R^2 adalah **i** dan **j**:
  i = (1, 0) dan **j** = (0, 1)

- Setiap vektor **v** = (v_1, v_2) di R^2 dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier
  v = v_1**i** + v_2**j**

- Vektor satuan standard di R^3 adalah **i**, **j**, dan **k**:
  i = (1, 0, 0), **j** = (0, 1, 0), dan **k** = (0, 0, 1),

- Setiap vektor **v** = (v_1, v_2, v_3) di R^3 dapat dinyatakan sebagai kombinasi liner **v** = v_1**i** + v_2**j** + v_3**k**



- Vektor satuan standard di R^n adalah $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, …, $\mathbf{e_n}$,

$$\mathbf{e_1} = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ \mathbf{e_2} = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ \text{dan}\ \mathbf{e_n} = (0, 0, 0, \ldots, 1),$$

- Setiap vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ di R^n dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e_1} + v_2\mathbf{e_2} + \ldots + v_n\mathbf{e_n}$

Contoh 3:

(i) $\mathbf{v} = (8, -4) = 8\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

(ii) $\mathbf{v} = (6, -2, 3) = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

(ii) $\mathbf{v} = (4, 6, 10, -1) = 4\mathbf{e_1} + 6\mathbf{e_2} + 10\mathbf{e_3} - \mathbf{e_4}$

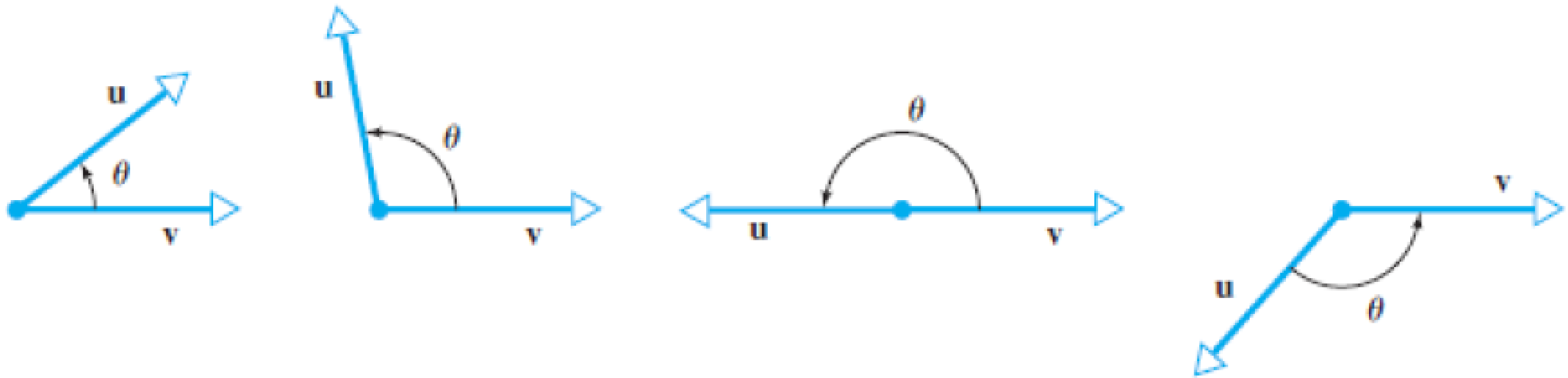
Perkalian titik (*dot product*)

- Jika **u** dan **v** adalah vektor tidak nol di R^2 atau R^3, maka perkalian titik (*dot product*), atau disebut juga *Euclidean inner product*, **u** dan **v** adalah

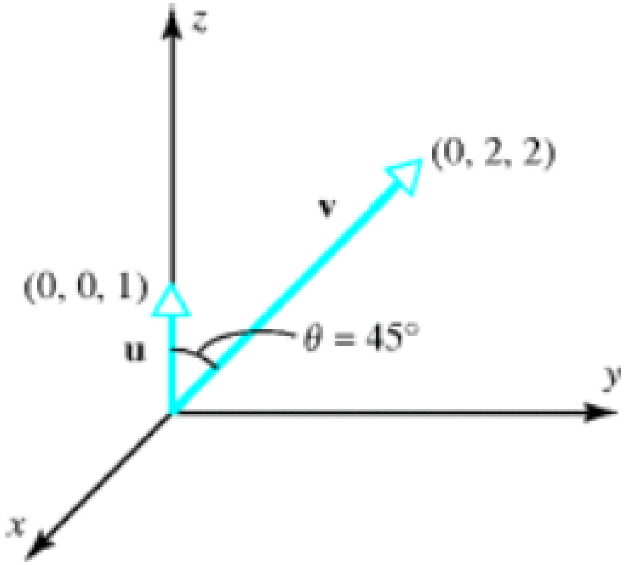
$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos \theta}$$

yang dalam hal ini θ adalah sudut yang dibentuk oleh **u** dan **v**.

- Jika **u** = 0 atau **v** = 0, maka $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$



Contoh 4: Misalkan **u** = (0, 0, 1) dan **v** = (0, 2, 2), sudut yang dibentuk oleh **u** dan **v** dapat ditentukan dari gambar adalah 45°.



Maka dapat dihitung,

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$$

$$= (\sqrt{0^2+0^2+1^2})(\sqrt{0^2+2^2+2^2})\cos 45^\circ$$

$$= (\sqrt{1})(\sqrt{8})\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$= \frac{\sqrt{16}}{2}$$

$$= 2$$

- Jika **u** = (u_1, u_2, u_3) dan **v** = (v_1, v_2, v_3) adalah dua vektor di R^3 maka dapat dibuktikan (bukti tidak diperlihatkan di sini) bahwa

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}$$

- Secara umum, jika **u** = (u_1, u_2, …, u_n) dan **v** = (v_1, v_2, …, v_n) adalah dua buah vektor di R^n maka

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n}$$

Contoh 5: Tinjau kembali Contoh 4, **u** = (0, 0, 1) dan **v** = (0, 2, 2), maka

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (0)(0) + (0)(2) + (1)(2) = 0 + 0 + 2 = 2$$

sama dengan hasil pada Contoh 4.

Contoh 6: Misalkan **u** = (–1, 3, 5, 7) dan **v** = (–3, –4, 1, 0), maka

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1)(-3) + (3)(-4) + (5)(1) + (7)(0)$$

$$= 3 - 12 + 5 + 0$$

$$= -4$$

- Dari rumus perkalian titik $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos \theta$ dapat ditulis menjadi

$$\boxed{\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}}$$

dan karena $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$, maka

$$\boxed{\cos \theta = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + unvn}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}}$$

Contoh 6: Carilah sudut antara vektor **u** = (2, –1, 1) dan **v** = (1, 1, 2).

Penyelesaian:

$$\cos\theta = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

$$= \frac{(2)(1)+(-1)(1)+(1)(2)}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(1)^2}\cdot\sqrt{(1)^2+(1)^2+(2)^2}}$$

$$= \frac{2-1+2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}$$

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \text{arc cos } \frac{1}{2} = 60^\circ$$

Sifat-sifat perkalian titik

THEOREM 3.2.2 *If* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, *and* $\mathbf{w}$ *are vectors in* R^n, *and if* k *is a scalar, then:*

(*a*) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ **[Symmetry property]**

(*b*) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ **[Distributive property]**

(*c*) $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$ **[Homogeneity property]**

(*d*) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ *and* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ *if and only if* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ **[Positivity property]**

THEOREM 3.2.3 *If* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, *and* $\mathbf{w}$ *are vectors in* R^n, *and if* k *is a scalar, then:*

(*a*) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{0} = 0$

(*b*) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

(*c*) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

(*d*) $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

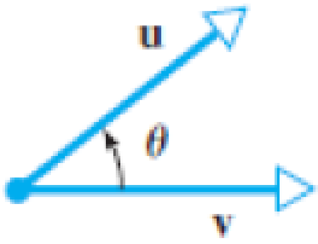
(*e*) $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})$

Teorema: Misalkan **u** dan **v** adalah vector-vector di R^2 atau R^3. Kondisi di bawah ini berlaku

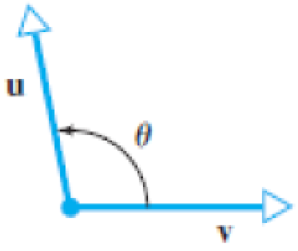
(1) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$ dan $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{1/2}$

(2) Jika **u** dan **v** adalah vektor tidak-nol dan θ adalah sudut antara kedua vector, maka

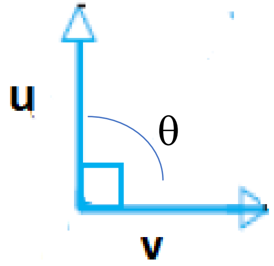
- θ adalah sudut lancip ($0 < \theta < 90°$) jika dan hanya jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$
- θ adalah sudut tumpul ($90 < \theta < 180°$) jika dan hanya jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$
- $\theta = 90°$ jika dan hanya jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ($\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ atau ortogonal)



sudut lancip



sudut tumpul



ortogonal

Contoh 7:

(i) Misalkan **u** = (6, 3, 3) dan **v** = (4, 0, –6), maka

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (6)(4) + (3)(0) + (3)(-6)$$

$= 24 + 0 - 18$

$= 6 > 0$

Jadi, **u** dan **v** membentuk sudut lancip

(ii) Misalkan **u** = (4, 1, 6) dan **v** = (–3, 0, 2), maka

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (4)(-3) + (1)(0) + (6)(2)$$

$= -12 + 0 + 12$

$= 0$

Jadi, **u** dan **v** saling tegak lurus (ortogonal)

Ketidaksamaan Cauchy-Schwarz

THEOREM 3.2.4 Cauchy–Schwarz Inequality

If $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *and* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *are vectors in* R^n, *then*

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \tag{22}$$

or in terms of components

$$|u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n| \leq (u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)^{1/2}(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)^{1/2} \tag{23}$$

Hermann Amandus Schwarz (1843-1921)

Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1804-1889)

Dot Products and Matrices

Table 1

Form	Dot Product	Example	
$\mathbf{u}$ a column matrix and $\mathbf{v}$ a column matrix	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}^T\mathbf{v}=\mathbf{v}^T\mathbf{u}$	$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1\\-3\\5\end{bmatrix}$ $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}5\\4\\0\end{bmatrix}$	$\mathbf{u}^T\mathbf{v}=[1\quad -3\quad 5]\begin{bmatrix}5\\4\\0\end{bmatrix}=-7$ $\mathbf{v}^T\mathbf{u}=[5\quad 4\quad 0]\begin{bmatrix}1\\-3\\5\end{bmatrix}=-7$
$\mathbf{u}$ a row matrix and $\mathbf{v}$ a column matrix	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\mathbf{v}=\mathbf{v}^T\mathbf{u}^T$	$\mathbf{u}=[1\quad -3\quad 5]$ $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}5\\4\\0\end{bmatrix}$	$\mathbf{u}\mathbf{v}=[1\quad -3\quad 5]\begin{bmatrix}5\\4\\0\end{bmatrix}=-7$ $\mathbf{v}^T\mathbf{u}^T=[5\quad 4\quad 0]\begin{bmatrix}1\\-3\\5\end{bmatrix}=-7$
$\mathbf{u}$ a column matrix and $\mathbf{v}$ a row matrix	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\mathbf{u}=\mathbf{u}^T\mathbf{v}^T$	$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1\\-3\\5\end{bmatrix}$ $\mathbf{v}=[5\quad 4\quad 0]$	$\mathbf{v}\mathbf{u}=[5\quad 4\quad 0]\begin{bmatrix}1\\-3\\5\end{bmatrix}=-7$ $\mathbf{u}^T\mathbf{v}^T=[1\quad -3\quad 5]\begin{bmatrix}5\\4\\0\end{bmatrix}=-7$
$\mathbf{u}$ a row matrix and $\mathbf{v}$ a row matrix	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\mathbf{v}^T=\mathbf{v}\mathbf{u}^T$	$\mathbf{u}=[1\quad -3\quad 5]$ $\mathbf{v}=[5\quad 4\quad 0]$	$\mathbf{u}\mathbf{v}^T=[1\quad -3\quad 5]\begin{bmatrix}5\\4\\0\end{bmatrix}=-7$ $\mathbf{v}\mathbf{u}^T=[5\quad 4\quad 0]\begin{bmatrix}1\\-3\\5\end{bmatrix}=-7$

Bersambung ke bagian 2