Seri bahan kuliah Algeo #9 - 2023

Determinan
(bagian 2)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Menghitung determinan dengan ekspansi kofaktor

- Misalkan A adalah matriks berukuran n x n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Didefinisikan:

M_{ij} = minor entri a_{ij}

= determinan upa-matriks (*submatrix*) yang elemen-elemennya tidak berada pada baris *i* dan kolom *j*

$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ = kofaktor entri a_{ij}

Misalkan A adalah matriks sebagai berikut: $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

Maka, untuk menghitung M_{11} tidak melibatkan elemen pada baris ke-1 dan kolom ke-1:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (-4)(5) = 26$$

Untuk menghitung M_{23} tidak melibatkan elemen pada baris ke-2 dan kolom ke-3:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (6)(5) - (-3)(1) = 33$$

Contoh 1: Tinjau matriks A berikut A = $\begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

Minor entri dan kofaktor dari matriks A adalah sebagai berikut:

$M_{11}=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=(2)(3)-(-4)(5) = 26$

$M_{12}=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=(2)(3)-(-4)(1) = 10$

$M_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=(2)(5)-(2)(1) = 8$

$M_{22}=\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=(6)(3)-(1)(1) = 17$

dan seterusnya untuk M_{21}, M_{23}, M_{31}, M_{32}, M_{33} dihitung dengan cara yang sama

$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}=26$

$C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}=-10$

$C_{13} = (-1)^{1+3}M_{13}= M_{13}= 8$

$C_{22} = (-1)^{2+2}M_{22}= M_{22}= 17$

dan seterusnya untuk C_{21}, C_{23}, C_{31}, C_{32}, C_{33} dihitung dengan cara yang sama

- Jadi, kofaktor C_{ij} berkoresponden dengan minor entri M_{ij}, hanya berbeda tanda (positif atau negatif, tergantung nilai *i* dan *j*)

- Cara mengingat tanda positif dan negative untuk C_{ij} adalah dengan memperhatikan pola berikut:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

- Dengan menggunakan kofaktor, maka determinan matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

dapat dihitung dengan <u>salah satu</u> dari persamaan berikut:

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \dots + a_{1n}C_{1n}$$

$$\det(A) = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + \dots + a_{2n}C_{2n}$$

$$\vdots$$

$$\det(A) = a_{n1}C_{n1} + a_{n2}C_{n2} + \dots + a_{nn}C_{nn}$$

Secara baris

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + \dots + a_{n1}C_{n1}$$

$$\det(A) = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + \dots + a_{n2}C_{n2}$$

$$\vdots$$

$$\det(A) = a_{1n}C_{1n} + a_{2n}C_{2n} + \dots + a_{nn}C_{nn}$$

Secara kolom

Contoh 2: Misalkan A = $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 8 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, determinan matriks A dihitung

dengan ekspansi kofaktor sebagai berikut (misalkan acuannya adalah baris pertama matriks A):

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

$$\det(A) = 3\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 3\{(0)(-3) – (4)(2)\} + 1\{(5)(–3) – (4)(8)\} + 2\{(5)(2) – (0)(8)\}$

$= 3(–8) + (–47) + 2(10)$

$= –24 – 47 + 20$

$= –51$

- Misalkan digunakan kolom kedua sebagai acuan:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 8 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$$

$$\det(A) = -(-1)\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \{(5)(-3) - (4)(8)\} + 0 - 2\{(3)(4) - (2)(5)\} \\ &= (-15 - 32) - 2\,(12 - 10) \\ &= (-47) - 2\,(2) \\ &= -51 \end{aligned}$$

Contoh 3: Hitung determinan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

det(A) = $a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + a_{14}C_{14}$

det(A) = $3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 3 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{vmatrix}$

$= 3\{2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}\} - 5\{1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\} + \ldots$

$= -18$

- **Tips 1**: gunakan acuan baris/kolom yang banyak 0 untuk menghemat perhitungan.

Contoh 4: Misalkan A = $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

det(A) = $-3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

= $-3(-4) + 0 + 0$

= 12

- **Tips 2**: terapkan OBE untuk memperoleh baris yang mengandung 0

Contoh 5: Hitung determinan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ (dari Contoh 3)

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{R3 - 2R2 \\ R4 - 3R2}}{\overset{R1 - 3R2}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} \overset{R3 + R1}{\sim} (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(-1)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = -18$$

Matriks Kofaktor

- Misalkan A adalah matriks n x n dan C_{ij} adalah kofaktor entri a_{ij}.
- Maka matriks kofaktor dari A adalah

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

- *Adjoin* dari A adalah transpose matriks kofaktor:

adj(A) = transpose matriks kofaktor

Contoh 6: Tentukan matriks kofaktor dan adjoin dari matriks A berikut

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Maktriks kofaktor dari A adalah

$$\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

Jadi matriks kofaktor: $\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$

Adjoin dari A adalah transpose matriks kofaktor:

adj(A) = $\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$

Mencari matriks balikan menggunakan adjoin

- Balikan matriks A dapat dihitung dengan menggunakan rumus:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)}$$

Contoh 7. Determinan matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ setelah dihitung adalah det(A) = 64.

Maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & -10 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/64 & 4/64 & 12/64 \\ 6/64 & 2/64 & -10/64 \\ -16/64 & -10/64 & 16/64 \end{bmatrix}$$

Kaidah Cramer

- Jika A**x** = **b** adalah SPL yang terdiri dari n persamaan linier dengan n peubah (variable) sedemikian sehingga det(A) $\neq$ 0, maka SPL tersebut memiliki solusi yang unik yaitu

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}\ , \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}\ , \ \ldots\ , \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

yang dalam hal ini, A_j adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti entri pada kolom ke-j dari A dengan entri dari matriks

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Contoh 8: Diberikan SPL

$$-x + 2y - 3z = 1$$

$$2x \qquad + \quad z = 0$$

$$3x - 4y + 4z = 2$$

Hitung solusinya dengan kaidah Cramer!

Penyelesaian: A**x** = **b**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 10$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & -3 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 \\ \mathbf{2} & -4 & 4 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{1} & -3 \\ 2 & \mathbf{0} & 1 \\ 3 & \mathbf{2} & 4 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & \mathbf{1} \\ 2 & 0 & \mathbf{0} \\ 3 & -4 & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

- Hitung determinan masing-masing A_j:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & -3 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 \\ \mathbf{2} & -4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{1} & -3 \\ 2 & \mathbf{0} & 1 \\ 3 & \mathbf{2} & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_2) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -15$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & \mathbf{1} \\ 2 & 0 & \mathbf{0} \\ 3 & -4 & \mathbf{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_3) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 16$$

- Hitung nilai x_i sebagai berikut:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \qquad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-15}{10} = \frac{-3}{2} \qquad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-16}{10} = \frac{-8}{5}$$

Contoh 7 (Kuis 2021). Diketahui sebuah sistem persamaan linier homogen Ax = 0 sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
2x - y - 3z &= 0 \\
-x + 2y - 3z &= 0 \\
x + y + 4z &= 0
\end{aligned}
$$

(a) Tentukan determinan matriks A pada persamaan di atas dengan ekspansi kofaktor
(b) Tentukan adj(A),yaitu matriks adjoin A
(c) Tentukan balikan (inverse) matriks A dengan menggunakan adj(A)
(d) Apakah sistem persamaan linier homogen di atas memiliki solusi trivial atau non-trivial? Jelaskan

Jawaban:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

det(A) = 2 $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ - (-1) $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ - 3 $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ = 2(8 – (-3)) + (-4 + 3) – 3(-1 – 2)

= 22 – 1 + 9 = 30

(b) Matriks kofaktor = $\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 1 & -3 \\ 1 & 11 & -3 \\ 9 & 9 & 3 \end{bmatrix}$

Adj(A) = transpose matriks cofactor = $\begin{bmatrix} 11 & 1 & 9 \\ 1 & 11 & 9 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 11 & 1 & 9 \\ 1 & 11 & 9 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/30 & 1/30 & 9/30 \\ 1/30 & 11/30 & 9/30 \\ -3/30 & -3/30 & 3/30 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 11/30 & 1/30 & 3/10 \\ 1/30 & 11/30 & 3/10 \\ -1/10 & -1/10 & 1/10 \end{bmatrix}$$

(d) Karena A memiliki balikan (A^{-1} ada), maka SPL homogen Ax = 0 memiliki solusi trivial (yaitu solusinya hanyalah x1 = x2 = x3 = 0)

Contoh 8 (Kuis 2022) Diketahui sistem persamaan linear sbb:

$$\begin{aligned} x_1 + \qquad\; + 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Selesaikan dengan menggunakan kaidah Cramer

<u>Jawaban</u>: Ax = b

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 44$$

$$A1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix},\quad A2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix},\quad A3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

det(A1) = -40 det(A2) = 72 det(A3) = 152

x1 = det(A1)/det(A) = -40/44 = -10/11
x2 = det(A2)/det(A) = 72/44 = 18/11
x3 = det(A3)/det(A) = 152/44 = 38/11

Latihan

Tentukan determinan matriks2 berikut dengan ekspansi kofaktor:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 40 & 10 & -1 & 0 \\ 100 & 200 & -23 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$