Seri bahan kuliah Algeo #8 - 2023

# Determinan
## (bagian 1)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

**Program Studi Teknik Informatika**
**STEI-ITB**

# Definisi determinan

- Misalkan A adalah matriks berukuran n x n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Determinan matriks A dilambangkan dengan

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

# Determinan matriks 2 x 2

Untuk matriks A berukuran 2 x 2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

maka det(A) = $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

**Contoh 1**: Matriks A berikut $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ memiliki determinan

det(A) = (3)(4) – (2)(-1) = 12 + 2 = 14

# Determinan matriks 3 x 3

Untuk matriks A berukuran 3 x3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right] \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

maka det(A) = $(a_{11}a_{22}\,a_{33} + a_{12}a_{21}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$

**Contoh 1**: Matriks A berikut $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ -3 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ memiliki determinan

det(A) ={ (2)(-2)(7) + (1)(5)(-3) + (3)(4)(-1)} –

{(3)(-2)(-3) + (2)(5)(-1) + (1)(4)(7)

= -28 – 15 – 12 – 18 + 10 - 28 = -91

$$\left[\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ -3 & -1 & 7 \end{matrix}\right] \begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{matrix}$$

# Determinan Matriks Segitiga

1. Matriks segitiga atas (*upper triangular*): semua elemen di bawah diagonal utama adalah nol

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(A) = a_{11}a_{22}\,a_{33}a_{44}$$

2. Matriks segitiga bawah (*lower triangular*): semua elemen *di atas* diagonal utama adalah nol

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(A) = a_{11}a_{22}\,a_{33}a_{44}$$

- Secara umum, untuk matriks segitiga A berukuran n x n,

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\, a_{33} \ldots\, a_{nn}$$

**Contoh 2**. Determinan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

adalah det(A) = (3)(4)(-2)(1) = -24

**Contoh 2**. Determinan matriks identitas

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

adalah det(A) = (1)(1)(1)(1) = 1

# Aturan Determinan

- Misalkan A adalah matriks n x n. Matriks B adalah matriks yang diperoleh dengan memanipulasi matriks A. Bagaimana determinan B?

- $A \xrightarrow{\text{Kalikan sebuah baris dengan k}} B$ , maka $\det(B) = k \det(A)$

- $A \xrightarrow{\text{Pertukarkan dua baris}} B$ , maka $\det(B) = -\det(A)$

- $A \xrightarrow[\text{dengan k kali baris yang lain}]{\text{Sebuah baris ditambahkan}} B$ , maka $\det(B) = \det(A)$

**Table 1**

| Relationship | Operation |
|---|---|
| $$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ $\det(B) = k\det(A)$ | The first row of $A$ is multiplied by $k$. |
| $$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ $\det(B) = -\det(A)$ | The first and second rows of $A$ are interchanged. |
| $$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ $\det(B) = \det(A)$ | A multiple of the second row of $A$ is added to the first row. |

**Contoh 3**: Misalkan A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ dan sudah dihitung pada Contoh 1 bahwa

det(A) = (3)(4) – (2)(-1) = 12 + 2 = 14

Misalkan B diperoleh dengan mengalikan baris pertama A dengan 2,

B = $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ maka det(B) = (6)(4) – (4)(-1)

= 24 + 4 = 28 = 2 x det(A)

Misalkan B diperoleh dengan mempertukarkan baris pertama dengan baris kedua,

B = $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ maka det(B) = (–1 )(2) – (4)(3)

= (–2) – 12 = –14 = –det(A)

Misalkan B diperoleh dengan menjumlahkan baris pertama dengan dua kali baris kedua,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R1 \leftarrow R1 + 2R2} \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = B$$

maka det(B) = (1 )(4) – (–1)(10)

= 4 + 10 = 14 = det(A)

# Menghitung determinan dengan reduksi baris

- Determinan matriks A dapat diperoleh dengan melakukan OBE pada matriks A sampai diperoleh matriks segitiga (segitiga bawah atau atas)

$$[A] \overset{\text{OBE}}{\sim} [\text{matriks segitiga bawah}]$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \overset{\text{OBE}}{\sim} \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & a'_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a'_{nn} \end{bmatrix}$$

maka $\det(A) = (-1)^p \, a'_{11} a'_{22} \ldots a'_{nn}$ *)

*p* menyatakan banyaknya operasi pertukaran baris di dalam OBE

*) Asumsi tidak ada operasi perkalian baris dengan konstanta *k*

- Jika selama reduksi baris ada OBE berupa perkalian baris-baris matriks dengan $k_1$, $k_2$, …, $k_m$, maka

$$\text{maka } \det(A) = \frac{(-1)^p\, a'_{11}\, a'_{22} \ldots a'_{nn}}{k_1 k_2 \ldots k_m}$$

**Contoh 4**: Misalkan A = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$, determinan matriks A dihitung

dengan reduksi baris menggunakan OBE sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \overset{R1 \leftrightarrow R2}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \overset{R3 - 2/3(R1)}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{bmatrix} \overset{R3 - 10R2}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{bmatrix}$$

matriks segitiga atas

Ada satu operasi pertukaran baris, maka $p$ = 1

sehingga det(A) = $(-1)^1(3)(1)(-55) = 165$

**Contoh 5**: Hitung determinan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \overset{R1 \leftrightarrow R3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{R3 - 3R1 \\ R4 + R1}}{\overset{R2 + R1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{R4 - 1/3(R2)}{\overset{R3 + R2}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1/3 \end{bmatrix} \overset{R4 + 1/6(R3)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7/6 \end{bmatrix}$$

Ada satu operasi pertukaran baris, maka $p$ = 1

sehingga det(A) = $(-1)^1(1)(3)(6)\left(\frac{7}{6}\right) = -21$

Jika misalnya baris 1 terlebih dahulu dibagi dengan 3 sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \overset{R1/3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{R3-R1 \\ R4+R1}}{\overset{R2+R1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{R3-R2/2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{R4+R3/3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 7/6 \end{bmatrix}$$

Tidak ada operasi pertukaran baris, maka $p$ = 0

Ada perkalian baris 1 dengan 1/3

sehingga det(A) = $\dfrac{(-1)^0(1)(2)(-3)(\frac{7}{6})}{1/3} = \dfrac{-7}{1/3} = -21$

**Contoh 6 (Kuis 2021).** Diberikan sebuah matriks sebagai berikut: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Hitung determinan matriks di atas dengan cara reduksi baris (operasi baris elementer).

<u>Jawaban</u>:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ R2 + 2R1; R4 - 2R3 } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ R5 – R4 } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinan = (1)(-1)(1)(2) = –2

# Latihan

Tentukan determinan matriks-matriks berikut dengan OBE:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 40 & 10 & -1 & 0 \\ 100 & 200 & -23 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

# Teorema tentang determinan

1. Jika A mengandung sebuah baris nol atau kolom nol, maka det(A) = 0

   Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \det(A) = 0$$

2. Jika $A^T$ adalah matriks transpose dari A, maka $\det(A^T) = \det(A)$

   Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ -3 & -1 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \det(A) = -91$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

det(A) = (2)(-2)(7) + (4)(-1)(3) + (-3)(1)(5)
 - (-3)(-2)(3) – (2)(-1)(5) – (4)(1)(7)
= -28 – 12 – 15 – 18 + 10 – 28 = –9 1

3. Jika $A = BC$ maka $\det(A) = \det(B)\det(C)$

4. Sebuah matriks hanya mempunyai balikan jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$

5. $\det(A^{-1}) = 1/(\det(A)$

   Bukti: $AA^{-1} = I$

   $\det(AA^{-1}) = \det(I)$

   $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$

   $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$

## THEOREM 2.3.8 Equivalent Statements

If $A$ is an $n \times n$ matrix, then the following statements are equivalent.

*(a)* $A$ is invertible.

*(b)* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ has only the trivial solution.

*(c)* The reduced row echelon form of $A$ is $I_n$.

*(d)* $A$ can be expressed as a product of elementary matrices.

*(e)* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is consistent for every $n \times 1$ matrix $b$.

*(f)* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has exactly one solution for every $n \times 1$ matrix $b$.

*(g)* $\det(A) \neq 0$.

**Contoh 7 (Kuis 2021).** Diberikan matriks A sebagai berikut, A = $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

Jika diketahui det(A) = 5 dan t = 2, maka hitunglah determinan:

a). $(3A^{-1})$

b). $\begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ g & h & i \\ 3d & 3e & 3f \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} a+td & b+te & c+tf \\ d+ta & e+tb & f+tc \\ g & h & i \end{pmatrix}$

<u>Jawaban:</u>

a) $\det(3A^{-1}) = 3^3 \det(A^{-1}) = 27\frac{1}{\det(A)} = \frac{27}{5}$

b) $\det\begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ g & h & i \\ 3d & 3e & 3f \end{pmatrix} = (2)(3)\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{pmatrix} = (2)(3)(-1)\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$= (2)(3)(-1)(5) = -30$

c) $\det\begin{pmatrix} a+td & b+te & c+tf \\ d+ta & e+tb & f+tc \\ g & h & i \end{pmatrix} \overset{\text{OBE}}{\text{R1} - t\,\text{R2}} \begin{pmatrix} a - t^2a & b - t^2b & c - t^2c \\ d+ta & e+tb & f+tc \\ g & h & i \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} (1-t^2)a & (1-t^2)b & (1-t^2)c \\ d+ta & e+tb & f+tc \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$\det\begin{pmatrix} (1-t^2)a & (1-t^2)b & (1-t^2)c \\ d+ta & e+tb & f+tc \\ g & h & i \end{pmatrix} = (1-t^2)\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d+ta & e+tb & f+tc \\ g & h & i \end{pmatrix} \overset{\text{OBE}}{\text{R2} - t\,\text{R1}}$

$= (1-t^2)\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = (1-2^2)\,(5) = (-3)\,(5) = -15$

**Latihan (Kuis 2022)** Diketahui determinan dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$ adalah -10, hitunglah determinan dari

a) $A^{-1} + A^{T}$

b) $2A^{2}$

c) Matrik $B = \begin{bmatrix} a+2d & d+3g & g \\ b+2e & e+3h & h \\ c+2f & f+3i & i \end{bmatrix}$

Kerjakan!

Bersambung ke bagian 2