

Aplikasi Sistem Persamaan Linier dalam Persoalan Dunia Nyata (*real world problem*)

Bahan Kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

**Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB**

A. Nutritional Analysis

Sumber: *College Algebra*, Fifth Edition,
James Stewart , Lothar Redlin, Saleem Watson

- A nutritionist is performing an experiment on student volunteers.

- He wishes to feed one of his subjects a daily diet that consists of a combination of three commercial diet foods:

- MiniCal
 - LiquiFast
 - SlimQuick

- For the experiment, it's important that, every day, the subject consume exactly:
 - 500 mg of potassium
 - 75 g of protein
 - 1150 units of vitamin D

- The amounts of these nutrients in one ounce of each food are given here.

	MiniCal	LiquiFast	SlimQuick
Potassium (mg)	50	75	10
Protein (g)	5	10	3
Vitamin D (units)	90	100	50

- How many ounces of each food should the subject eat every day to satisfy the nutrient requirements exactly?

- Let x , y , and z represent the number of ounces of MiniCal, LiquiFast, and SlimQuick, respectively, that the subject should eat every day.

- This means that he will get:
 - 50x mg of potassium from MiniCal
 - 75y mg from LiquiFast
 - 10z mg from SlimQuick

- This totals $50x + 75y + 10z$ mg potassium.

	MiniCal	LiquiFast	SlimQuick
Potassium (mg)	50	75	10
Protein (g)	5	10	3
Vitamin D (units)	90	100	50

- Based on the requirements of the three nutrients, we get the system

$$\begin{cases} 50x + 75y + 10z = 500 & \text{Potassium} \\ 5x + 10y + 3z = 75 & \text{Protein} \\ 90x + 100y + 50z = 1150 & \text{Vitamin D} \end{cases}$$

- Dividing the first equation by 5 and the third by 10 gives the system

$$\begin{cases} 50x + 75y + 10z = 500 & \text{Potassium} \\ 5x + 10y + 3z = 75 & \text{Protein} \\ 90x + 100y + 50z = 1150 & \text{Vitamin D} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 10x + 15y + 2z = 100 \\ 5x + 10y + 3z = 75 \\ 9x + 10y + 5z = 115 \end{cases}$$

- We can solve this using Gaussian elimination.
- Alternatively, we could use a graphing calculator to find the reduced row-echelon form of the augmented matrix of the system.

Solution: $x = 5, y = 2, z = 10$

- Every day, the subject should be fed:
 - 5 oz of MiniCal
 - 2 oz of LiquiFast
 - 10 oz of SlimQuick

	MiniCal	LiquiFast	SlimQuick
Potassium (mg)	50	75	10
Protein (g)	5	10	3
Vitamin D (units)	90	100	50

- A more practical application might involve dozens of foods and nutrients rather than just three.
 - Such problems lead to systems with large numbers of variables and equations.
 - Computers or graphing calculators are essential for solving such large systems.

Latihan: Soal Kuis tahun 2020

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika (STEI) ITB untuk mendukung pengajaran daring di zaman pandemi covid 19 ini akan memberikan sumbangan peralatan kepada dosen-dosennya unit microphone, unit headset, dan unit webcam. STEI meminta Direktorat Logistik untuk melakukan pengadaan barang-barang tersebut di atas. Dirlog melakukan 3 kali pelelangan. Dari pelelangan pertama diketahui bahwa Dirlog membeli 100 unit microphone, 100 unit headset, dan 200 unit webcam dan total harganya adalah US\$ 800. Pada pelelangan kedua diketahui bahwa harga pembelian 300 unit webcam total harganya sama dengan total harga pembelian 100 unit microphone ditambah dengan total harga pembelian 200 unit headset ditambah uang US\$100. Pada pelelangan yang ketiga diketahui bahwa total harga 300 microphone ditambah total harga 400 webcam sama dengan total harga 700 unit headset ditambah uang US\$1000 sama dengan

- Ubahlah persoalan di atas menjadi Sistem Persamaan Linear untuk mengetahui harga masing-masing alat per unitnya.
- Lakukan metode eliminasi Gauss-Jordan untuk mengetahui berapa US\$ harga dari 1 unit microphone, 1 unit headset, dan 1 unit webcam.

(Nilai: 10 + 20)

Jawaban:

a) Misalkan x adalah harga 1 unit microphone, y adalah harga 1 unit headset, dan z adalah harga 1 unit webcam.

Maka SPL yang menyatakan persoalan di atas adalah:

$$100x + 100y + 200z = 800$$

$$300z = 100x + 200y + 100$$

$$300x + 400z = 700y + 1000$$

atau

$$100x + 100y + 200z = 800$$

$$100x + 200y - 300z = -100$$

$$300x - 700y + 400z = 1000$$

Disederhanakan menjadi:

$$x + y + 2z = 8$$

$$x + 2y - 3z = -1$$

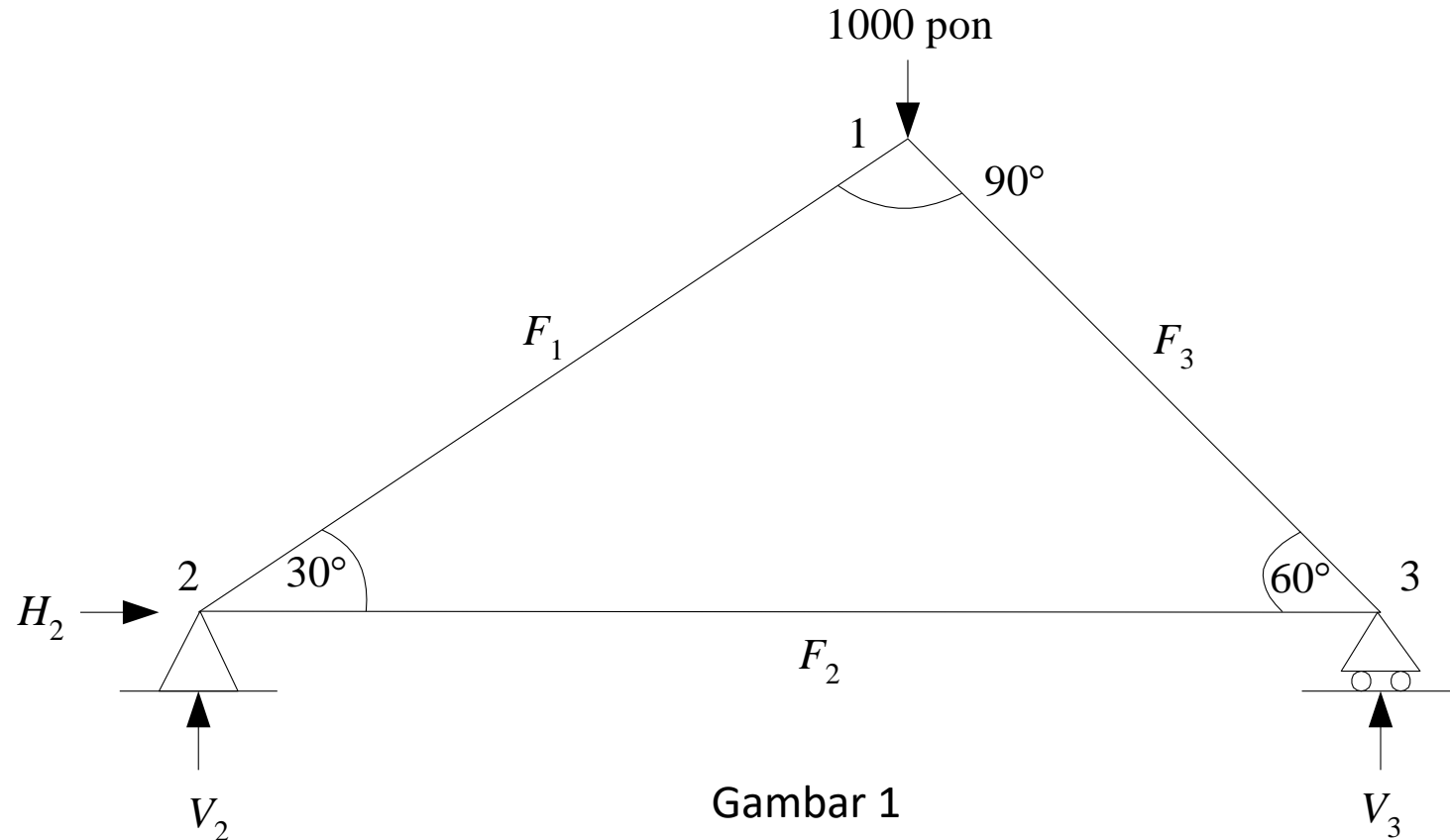
$$3x - 7y + 4z = 10$$

b) Penyelesaian dengan metode eliminasi Gauss-Jordan (lakukan!) menghasilkan solusi harga 1 unit microphone adalah US\$3, harga 1 unit headset adalah US\$1 dan harga 1 unit webcam adalah US\$2

B. Sistem Persamaan Linier dalam bidang Teknik Sipil

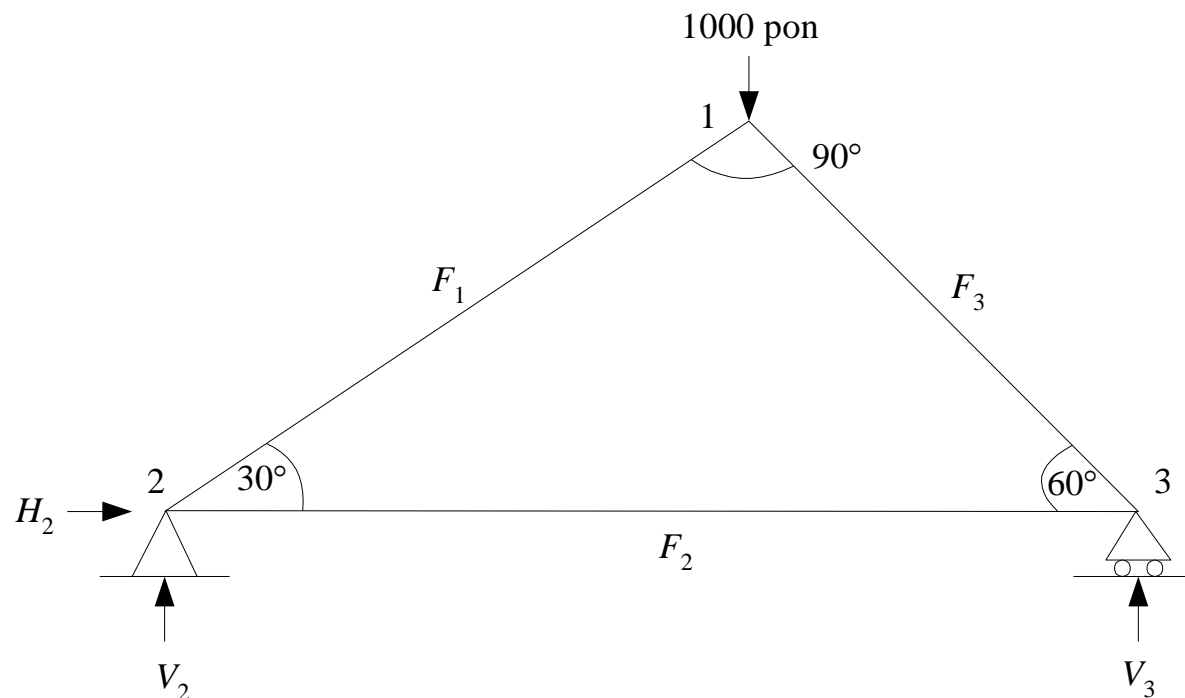
Sumber: Chapra, Steven C dan Canale, Raymond P,
*Numerical Methods for Engineers with Personal
Computer Applications*, MacGraw-Hill Book
Company

- Seorang insinyur Teknik Sipil merancang sebuah rangka statis yang berbentuk segitiga (Gambar 1). Ujung segitiga yang bersudut 30° bertumpu pada sebuah penyangga statis, sedangkan ujung segitiga yang lain bertumpu pada penyangga beroda.

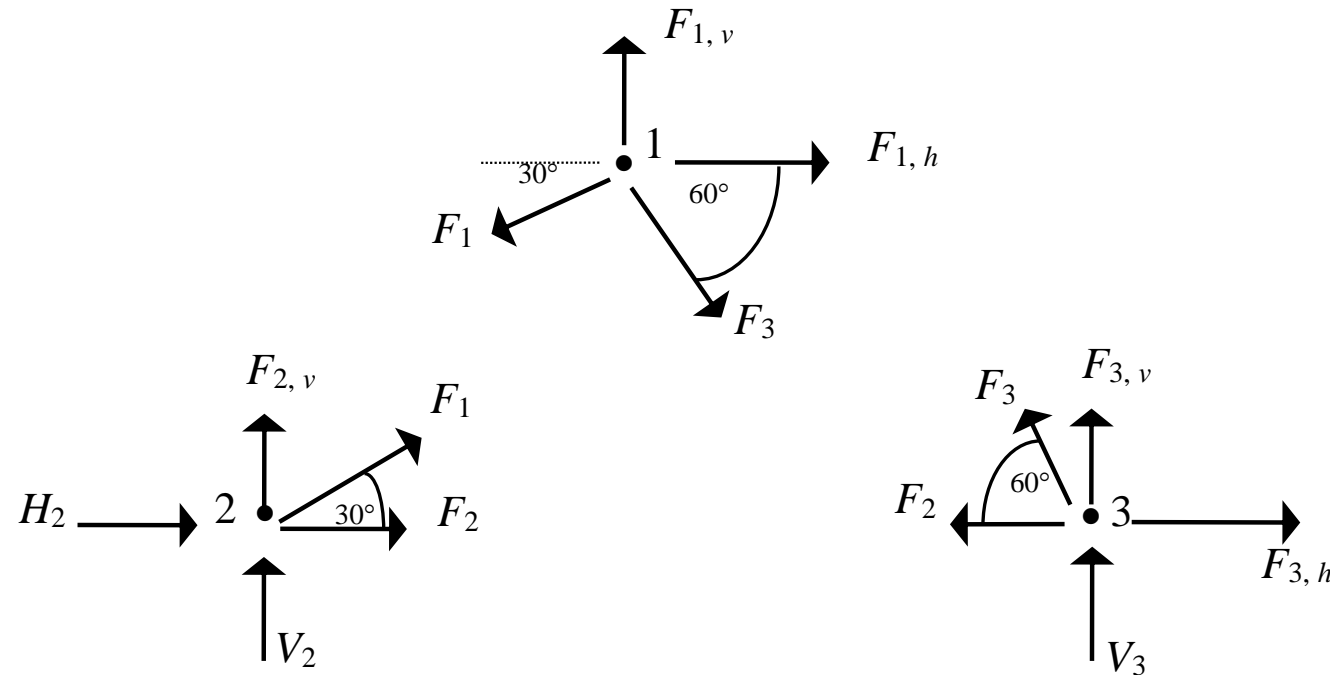


Gambar 1

- Rangka mendapat gaya eksternal sebesar 1000 pon. Gaya ini disebar ke seluruh bagian rangka. Gaya F menyatakan tegangan atau kompresi pada anggota rangka. Reaksi eksternal (H_2 , V_2 , dan V_3) adalah gaya yang mencirikan bagaimana rangka berinteraksi dengan permukaan pendukung.
- Engsel pada simpul 2 dapat menjangkitkan gaya mendatar dan tegak pada permukaan, sedangkan gelinding pada simpul 3 hanya menjangkitkan gaya tegak.



- Struktur jenis ini dapat diuraikan sebagai sistem persamaan linier simultan. Diagram gaya-benda-bebas diperlihatkan untuk tiap simpul dalam Gambar 2.



Gambar 2

Menurut hukum Newton, resultan gaya dalam arah mendatar maupun tegak harus nol pada tiap simpul, karena sistem dalam keadaan diam (statis).

Oleh karena itu, untuk simpul 1,

$$\sum F_H = 0 = -F_1 \cos 30^\circ + F_3 \cos 60^\circ + F_{1,h}$$

$$\sum F_V = 0 = -F_1 \sin 30^\circ - F_3 \sin 60^\circ + F_{1,v}$$

Untuk simpul 2,

$$\sum F_H = 0 = F_2 + F_1 \cos 30^\circ + F_{2,h} + H_2$$

$$\sum F_V = 0 = F_1 \sin 30^\circ - F_{2,v} + V_2$$

dan untuk simpul 3,

$$\sum F_H = 0 = -F_2 - F_3 \cos 60^\circ + F_{3,h}$$

$$\sum F_V = 0 = F_3 \sin 60^\circ + F_{3,v} + V_3$$

- Gaya 1000 pon ke bawah pada simpul 1 berpadanan dengan $F_{1,v} = -1000$, sedangkan semua $F_{i,v}$ dan $F_{i,h}$ lainnya adalah nol.
- Persoalan rangka statis ini dapat dituliskan sebagai sistem yang disusun oleh enam persamaan linier dengan 6 peubah yang tidak diketahui:

$$\sum F_H = 0 = -F_1 \cos 30^\circ + F_3 \cos 60^\circ + F_{1,h} = -0.866F_1 + 0.5 F_3$$

$$\sum F_V = 0 = -F_1 \sin 30^\circ - F_3 \sin 60^\circ + F_{1,v} = -0.5F_1 - 0.866 F_3 + 1000$$

$$\sum F_H = 0 = F_2 + F_1 \cos 30^\circ + F_{2,h} + H_2 = F_2 + 0.866F_1 + 0 + H_2$$

$$\sum F_V = 0 = F_1 \sin 30^\circ - F_{2,v} + V_2 = 0.5 F_1 + V_2$$

$$\sum F_H = 0 = -F_2 - F_3 \cos 60^\circ + F_{3,h} = -F_2 - 0.5 F_3$$

$$\sum F_V = 0 = F_3 \sin 60^\circ + F_{3,v} + V_3 = 0.866 F_3 + V_3$$

- Keenam persamaan di atas ditulis ulang kembali dalam susunan yang teratur berdasarkan urutan peubah $F_1, F_2, F_3, H_2, V_2, V_3$:

$$\begin{array}{rclcl}
 -0.866F_1 & + & 0.5 F_3 & & = 0 \\
 -0.5F_1 & & & - 0.866 F_3 & = -1000 \\
 -0.866F_1 - F_2 & & & & - H_2 & = 0 \\
 -0.5 F_1 & & & & & - V_2 & = 0 \\
 & - F_2 & - 0.5 F_3 & & & & = 0 \\
 & & -0.866 F_3 & & & - V_3 & = 0
 \end{array}$$

- atau dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} 0.866 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.866 & 0 & 0 & 0 \\ -0.866 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.866 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ H_2 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

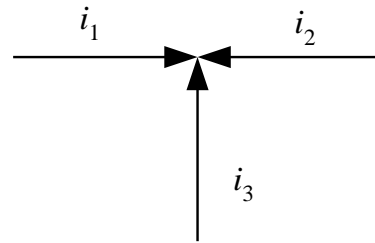
- Nilai F_1 , F_2 , F_3 , H_2 , V_2 , dan V_3 yang memenuhi keenam persamaan tersebut secara simultan dapat ditemukan dengan metode eliminasi Gauss/Gauss-Jordan.

C. Sistem Persamaan Linier dalam Bidang Fisika (rangkaiian listrik)

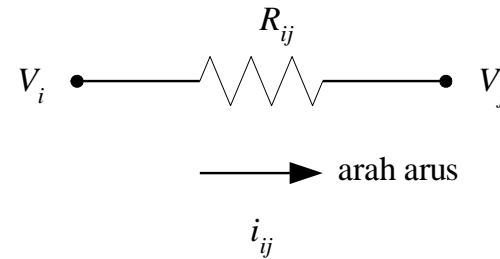
Tinjau contoh persoalan rangkaian listrik...

Dalam sebuah rangkaian listrik berlaku hukum-hukum arus Kirchoff menyatakan bahwa jumlah aljabar dari semua arus yang memasuki suatu simpul (Gambar 1a) haruslah nol:

$$\sum i = 0$$



(a)



(b)

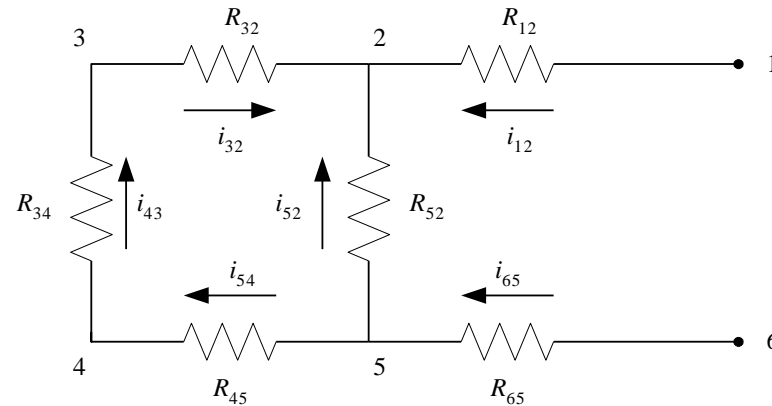
Gambar 1. Hukum Kirchoff dan Hukum Ohm

Dalam hal ini, semua arus i yang memasuki simpul dianggap bertanda positif. Sedangkan hukum Ohm (Gambar 1b) menyatakan bahwa arus i yang melalui suatu tahanan adalah :

$$i_{ij} = \frac{V_i - V_j}{R_{ij}}$$

yang dalam hal ini V adalah tegangan dan R adalah tahanan.

Diberikan sebuah rangkaian listrik dengan 6 buah tahanan seperti pada Gambar 2. Anda diminta menghitung arus pada masing-masing tahanan.



Gambar 2. Rangkaian listrik dengan 6 tahanan

Arah arus dimisalkan seperti diatas. Dengan hukum Kirchoff diperoleh persamaan-persamaan berikut :

$$\begin{array}{rclcl}
 i_{12} & + & i_{52} & + & i_{32} & = & 0 \\
 i_{65} & - & i_{52} & - & i_{54} & = & 0 \\
 i_{43} & - & i_{32} & & & = & 0 \\
 i_{54} & - & i_{43} & & & = & 0
 \end{array}$$

Dari hukum Ohm didapat :

$$\begin{aligned}i_{32} R_{32} - V_3 + V_2 &= 0 \\i_{43} R_{43} - V_4 + V_3 &= 0 \\i_{65} R_{65} + V_5 &= V_6 \\i_{12} R_{12} + V_2 &= V_1 \\i_{54} R_{54} - V_5 + V_4 &= 0 \\i_{52} R_{52} - V_5 + V_2 &= 0\end{aligned}$$

Dengan menyusun kesepuluh persamaan diatas didapatkan sistem persamaan linjar sebagai berikut :

$$\begin{array}{rcccccccc}
i_{12} & + i_{52} & + i_{32} & & & & & & = 0 \\
- i_{52} & & & + i_{65} & - i_{54} & & & & = 0 \\
- i_{32} & & & & & + i_{43} & & & = 0 \\
i_{54} & - i_{43} & & & & & & & = 0 \\
i_{32} R_{32} & & & & & V_2 & - V_3 & & = 0 \\
i_{43} R_{43} & & & & & & + V_3 & - V_4 & = 0 \\
i_{65} R_{65} & & & & & & & + V_5 & = V_6 \\
i_{12} R_{12} & & & & & & + V_2 & & = V_1 \\
i_{54} R_{54} & & & & & & & + V_4 & - V_5 = 0 \\
i_{52} R_{52} & & & & & & + V_2 & & - V_5 = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccc}
 i_{12} & i_{52} & i_{32} & i_{65} & i_{54} & i_{43} & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \\
 \left[\begin{array}{cccccccccc}
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & R_{32} & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{43} & 0 & 1 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & R_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 R_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & R_{54} & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 0 & R_{52} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1
 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c}
 i_{12} \\
 i_{52} \\
 i_{32} \\
 i_{65} \\
 i_{54} \\
 i_{43} \\
 V_2 \\
 V_3 \\
 V_4 \\
 V_5
 \end{array} \right] & = & \left[\begin{array}{c}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 V_6 \\
 V_1 \\
 0 \\
 0
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Tentukan

$$i_{12}, i_{52}, i_{32}, i_{65}, i_{54}, i_{43}, V_2, V_3, V_4, V_5$$

bila diketahui

$$R_{12} = 5 \text{ ohm}, \quad R_{52} = 10 \text{ ohm}, \quad R_{32} = 10 \text{ ohm}$$

$$R_{65} = 20 \text{ ohm}, \quad R_{54} = 15 \text{ ohm}, \quad R_{14} = 5 \text{ ohm.}$$

$$V_1 = 200 \text{ volt}, \quad V_6 = 0 \text{ volt.}$$