Seri bahan kuliah Algeo #5 - 2023

Sistem Persamaan Linier (SPL)

Pokok bahasan: Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Bahan Kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Metode Eliminasi Gauss-Jordan

- Merupakan pengembangan metode eliminasi Gauss
- Operasi baris elementer (OBE) diterapkan pada matriks *augmented* sehingga menghasilkan matriks eselon baris tereduksi.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \sim\text{OBE}\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & * \end{bmatrix}$$

- Tidak diperlukan lagi substitusi secara mundur untuk memperoleh nilai-nilai variabel. Nilai variabel langsung diperoleh dari matriks *augmented* akhir (jika solusinya unik).

- Metode eliminasi Gauss-Jordan terdiri dari dua fase:

1. Fase maju (*forward phase*) atau fase eliminasi Gauss

   - Menghasilkan nilai-nilai 0 di bawah 1 utama

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{\text{OBE}}{\sim} \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Fase mundur (*backward phase*)

   - Menghasilkan nilai-nilai 0 di atas satu utama

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \overset{R1-(3/2)R2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5/4 & -11/4 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{R2-(1/2)R3}{\overset{R1+(5/4)R3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Kedua fase dapat dilakukan secara bersamaan atau sekuensial

Matriks eselon baris tereduksi

Dari matriks *augmented* terakhir, diperoleh $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$

Contoh 1: Selesaikan SPL berikut dengan eliminasi Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 9 \\ x_1 - 2x_3 + 7x_4 &= 11 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 &= 10 \end{aligned}$$

Matriks eselon baris tereduksi

Penyelesaian:

Fase maju:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 3 & -3 & 1 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 10 \end{bmatrix} \text{R1} \leftrightarrow \text{R2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 3 & -3 & 1 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{R2 – 2R1} \\ \text{R3 – 3R1} \\ \text{R2 – 2R1} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ \mathbf{0} & -1 & 7 & -10 & -13 \\ \mathbf{0} & -3 & 7 & -16 & -25 \\ \mathbf{0} & 1 & 8 & -10 & -12 \end{bmatrix} \text{(–1)*R2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & -7 & 10 & 13 \\ 0 & -3 & 7 & -16 & -25 \\ 0 & 1 & 8 & -10 & -12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{R3 + 3R2} \\ \text{R4 – R2} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & -7 & 10 & 13 \\ 0 & \mathbf{0} & -14 & 14 & 14 \\ 0 & \mathbf{0} & 15 & -20 & -25 \end{bmatrix} \text{(–1/14)*R3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & -7 & 10 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 15 & -20 & -25 \end{bmatrix} \text{R4 – 15R1}$$

$$\ldots \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & -7 & 10 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & -5 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1/5)*R4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & -7 & 10 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks eselon baris

Fase mundur:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & -7 & 10 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R2 + 7R3]{R1 + 2R3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0} & 5 & 9 \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R2 - 3R4 \\ R3 + R4}]{R1 - 5R4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks eselon baris tereduksi

Dari matriks *augmented* terakhir diperoleh solusi SPL sbb:

$x_1 = -1;$

$x_2 = 0;$

$x_3 = 1;$

$x_4 = 2$

Contoh 2: Selesaikan SPL berikut dengan eliminasi Gauss-Jordan

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1$$
$$2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -2$$
$$-x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 1$$
$$3x_1 - 3x_4 = -3$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{R2} - \text{2R1} \\ \\ \text{R3} + \text{R1} \\ \text{R4} - \text{3R1} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ \mathbf{0} & 3 & -6 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & -2 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 3 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{R2 / 3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{R3} - \text{R2} \\ \text{R4} - \text{3R2} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{R1 + R2} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Persamaan yang diperoleh:

$x_1 - x_4 = -1$ (i)

$x_2 - 2x_3 = 0$ (ii)

Matriks eselon baris tereduksi

Matriks *augmented* terakhir sudah berbentuk eselon baris tereduksi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Persamaan yang diperoleh:

$x_1 - x_4 = -1$ (i)

$x_2 - 2x_3 = 0$ (ii)

Dari (ii) diperoleh:

$x_2 = 2x_3$

Dari (i) diperoleh:

$x_1 = x_4 - 1$

Misalkan $x_3 = r$ dan $x_4 = s$, maka solusi SPL tersebut adalah:

$x_1 = s - 1$, $x_2 = 2r$, $x_3 = r$, $x_4 = s$, yang dalam hal ini $r, s \in R$

Contoh 3: Selesaikan SPL berikut dengan eliminasi Gauss-Jordan

$$
\begin{aligned}
-2x_3 + 7x_5 &= 12 \\
2x_1 + 4x_2 - 10x_3 + 6x_4 + 12x_5 &= 28 \\
2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 8x_4 - 5x_5 &= -1
\end{aligned}
$$

Penyelesaian:

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}
\overset{R1 \leftrightarrow R2}{\sim}
\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}
\overset{R1/2}{\sim}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}
\overset{R3\ -\ 2R1}{\sim}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & \mathbf{0} & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}
\overset{R2/(-2)}{\sim}
$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6\\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29\end{bmatrix} \overset{R3\ -\ 5R2}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6\\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 1/2 & 1\end{bmatrix} \overset{R3/(1/2)}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix} \underset{R2\ +\ 7/2\ R3}{\overset{R1\ -\ 6R3}{\sim}} \begin{bmatrix}1 & 2 & -5 & 3 & \mathbf{0} & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix} \overset{R1\ +\ 5R2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & \mathbf{0} & 3 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

Matriks eselon baris tereduksi

Dari matriks augmented yang terakhir diperoleh persamaan:

$x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 7$ (i)

$x_3 = 1$ (ii)

$x_5 = 2$ (iii)

Misalkan $x_2 = s$ dan $x_4 = t$, maka solusi SPL adalah:

$x_1 = 7 - 2s - 3t$, $x_2 = s$, $x_3 = 1$, $x_4 = t$, $x_5 = 2$, s dan t $\in$ R

Sistem Persamaan Linier Homogen

- Sistem persamaan linier homogen berbentuk:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\
&\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0
\end{aligned}
$$

- $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ selalu menjadi solusi SPL homogen. Jika ini merupakan satu-satunya solusi, solusi nol ini disebut solusi trivial.
- Jika ada solusi lain selain $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$, maka solusi tersebut dinamakan solusi non-trivial.

Contoh 4: Selesaikan SPL homogen dengan matriks augmented sebagai berikut dengan eliminasi Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \overset{R1 \leftrightarrow R2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \underset{R4+2R1}{\overset{R3-2R1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ \mathbf{0} & 3 & 3 & 7 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & 1 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R2/2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -8 & 0 \end{bmatrix} \underset{R4-R2}{\overset{R3-3R2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & -10 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{R2-2R3 \\ R4+10R3}}{\overset{R1+3R3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks *augmented* yang terakhir sudah dalam bentuk eselon baris tereduksi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh persamaan-persamaan berikut:

$x_1 – x_3 = 0 \rightarrow x_1 = x_3$

$x_2 + x_3 = 0 \rightarrow x_2 = –x_3$

$x_4 = 0$

Misalkan $x_3 = t$, maka solusi SPL adalah $x_1 = t$, $x_2 = –t$, $x_3 = t$, $x_4 = 0$, $t \in R$.
Perhatikan bahwa untuk $t = 0$, maka $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Namun ini bukan satu-satunya solusi. Untuk t selain 0 terdapat banyak kemungkinan solusi SPL. Sehingga dikatakan SPL homogen ini memiliki solusi non-trivial.

- Di dalam sebuah SPL sembarang A**x** = **b**, sebuah SPL disebut konsisten jika ia mempunyai paling sedikit satu solusi (baik solusi tunggal atau solusi banyak).
- Sebaliknya, sebuah SPL disebut inkonsisten jika ia tidak memiliki solusi.

- SPL homogen A**x** = **0** selalu konsisten karena ia sedikitnya mengandung solusi trivial.
- Jadi, di dalam SPL homogen berlaku salah satu sifat sebagai berikut:
    1. SPL homogen memiliki solusi trivial
    2. SPL homogen memiliki tak berhingga solusi

Menghitung Matriks Balikan dengan Eliminasi Gauss-Jordan

- Misalkan *A* adalah matriks persegi berukuran n x n. Balikan (*inverse*) matriks A adalah A^{-1} sedemikian sehingga $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
- Metode eliminasi Gauss-Jordan (G-J) dapat digunakan untuk menghitung matriks balikan.
- Untuk matriks A yang berukuran n x n, matriks balikannya, yaitu A^{-1}, dicari dengan cara berikut:

$$[A|I] \overset{\text{G-J}}{\sim} [I|A^{-1}]$$

  yang dalam hal ini *I* adalah matriks identitas berukuran n x n.

- Metode eliminasi Gauss-Jordan diterapkan secara simultan untuk A maupun I.

Contoh 5: Tentukan balikan dari matriks A berikut: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{R3 – R1}}{\overset{\text{R2 – 2R1}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{R3 + 2R2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{R3/(–1)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \overset{\text{R1 – 2R2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \underset{\text{R2 + 3R3}}{\overset{\text{R1 – 9R3}}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) = (I|A^{-1})$$

Jadi, balikan matriks A adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Periksa bahwa

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Contoh 6: Tentukan balikan dari matriks A berikut: $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{R3 + R1}}{\overset{\text{R2 – 2R1}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{R2/(–8)}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9/8 & 2/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{R3 – 8R2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9/8 & 2/8 & -1/8 & 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} & & & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ada baris bernilai 0

Karena ada baris yang bernilai 0, maka A tidak memiliki balikan.

- Jika A tidak memiliki balikan, maka A dinamakan **matriks singular**.

- Pada SPL A**x** = **b**, jika A tidak mempunyai balikan, maka A**x** = **b** tidak memiliki solusi yang tunggal (unik).

- Namun, jika A mempunyai balikan, maka SPL A**x** = **b** memiliki solusi unik.

- Pada SPL homogen A**x** = **0**, SPL hanya memiliki solusi trivial jika A memiliki balikan. Jika A tidak memiliki balikan, maka SPL memiliki solusi non-trivial.

Contoh 7: SPL homogen berikut memiliki solusi trivial (artinya solusinya hanyalah $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$).

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad\; + 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriks A SPL di atas sudah dihitung pada Contoh 5 memiliki balikan.

Tetapi SPL homogen berikut memiliki solusi non-trivial (artinya, ada solusi yang lain selain $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$)

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad A^{-1} \text{ tidak ada}$$

Matriks A SPL di atas sudah dihitung pada Contoh 6 tidak memiliki balikan.

Penyelesaian SPL dengan menggunakan matriks balikan

- Tinjau SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Kalikan kedua ruas persamaan dengan A^{-1}

$$(A^{-1})A\mathbf{x} = (A^{-1})\,\mathbf{b}$$

$$I\mathbf{x} = A^{-1}\,\mathbf{b} \qquad \text{(karena } A^{-1}A = I\text{)}$$

$$\mathbf{x} = A^{-1}\,\mathbf{b} \qquad \text{(karena } I\mathbf{x} = \mathbf{x}\text{)}$$

- Jadi, solusi SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ adalah x $=A^{-1}\,\mathbf{b}$

Contoh 8. Selesaikan SPL berikut

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\
2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\
x_1 \qquad\quad + 8x_3 &= 1
\end{aligned}
$$

Penyelesaian:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ sudah dihitung balikannya pada Contoh 5 yaitu $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

maka

$$\mathbf{x} = A^{-1}\,\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Metode penyelesaian SPL dengan menggunakan matriks balikan sangat berguna untuk menyelesaikan <u>sejumlah</u> SPL A**x** = **b** dengan A yang sama tetapi dengan **b** yang berbeda-beda, seperti contoh ini:

$$\begin{array}{lll}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4 \\
2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 & 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 & 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 12 \\
x_1 \qquad\quad + 8x_3 = 1 & x_1 \qquad\quad + 8x_3 = -2 & x_1 \qquad\quad + 8x_3 = 5 \\
\text{(i)} & \text{(ii)} & \text{(iii)}
\end{array}$$

- Tiga buah SPL di atas memiliki A yang sama namun **b** yang berbeda-beda. Cukup sekali mencari A^{-1} maka solusi setiap SPL dapat dihitung dengan cara mengalikan A^{-1} dengan setiap **b**, yaitu x =A^{-1} **b** .

Latihan

1. Selesaikan SPL berikut dengan metode eliminasi Gauss-Jordan

(a)
$$
\begin{aligned}
x - y + 2z - w &= -1 \\
2x + y - 2z - 2w &= -2 \\
-x + 2y - 4z + w &= 1 \\
3x \qquad\qquad - 3w &= -3
\end{aligned}
$$

(b) SPL dalam bentuk matriks augmented

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\
2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\
2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1
\end{bmatrix}
$$

2. Tentukan balikan matriks berikut (jika ada)

(a)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)
$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

(c)
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

(d)
$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$$

Catatan: k1, k2, k3, dan k4 tidak sama dengan nol