Solusi Kuis 3 IF2123 Aljabar Linier dan Geometri Nama: ……………………………………

23 November 2022 NIM: ……………………………………..

Waktu: 90 menit Tanda-tangan: ………………………

Sifat: Closed book

Kerjakan soal-soal di bawah dengan teliti. Jangan lupa berdoa terlebih dahulu.

1. a) Tentukan nilai eigen, vektor eigen, dan basis ruang eigen dari matriks sbb : $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

   b) Tentukan matriks P, jika ada, yang mendiagonalisasi matriks A

   c) Gunakan matriks diagonal untuk menghitung A^5.

Jawaban:

a)

Nilai Eigen (λ)

$(\lambda I - A)v = 0$ ← Persamaan Karakteristik

$\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right) v = 0$ ← Matriks $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right) v = 0$

$\left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -1 & \lambda - 4 \end{bmatrix}\right) v = 0$

Untuk menentukan nilai λ yang skalar, berlaku:

$\det(\lambda I - A) = 0$

$\det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -1 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = 0$ ← Determinan Matriks ordo 2x2 = (ad – bc)

$\left((\lambda - 1)(\lambda - 4) - (2)(-1)\right) = 0$

$(\lambda^2 - 5\lambda + 4 + 2) = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$

$\lambda = 2$ atau $\lambda = 3$ ← Nilai Eigen

Vektor Eigen

$(\lambda I - A)v = 0$

$\left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -1 & \lambda - 4 \end{bmatrix}\right) v = 0$

$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -1 & \lambda - 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$

Untuk nilai $\lambda = 2$, maka:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Terbentuk Sistem Persamaan Linear

$v_1 + 2v_2 = 0$

$-v_1 - 2v_2 = 0$

Diperoleh:

$v_1 = -2$ dan $v_2 = 1$

Pembuktian:

$Av = \lambda v$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ terbukti

Untuk nilai $\lambda = 3$, maka:

$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Terbentuk Sistem Persamaan Linear

$2v_1 + 2v_2 = 0$

$-v_1 - v_2 = 0$

Diperoleh

$v_1 = 1$ dan $v_2 = -1$

Pembuktian:

$Av = \lambda v$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ terbukti

Vektor eigen 1: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in R$, basis ruang eigen adalah $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vektor eigen 2: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, t \in R$, basis ruang eigen adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

b) Matriks P = $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, dan P^{-1} = 1/((-2)(-1) – (1)(1)) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

Matriks diagonal D = $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

c) $A^5 = PD^5P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 243 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -179 & -422 \\ 211 & 454 \end{bmatrix}$

2. Tentukan SVD dari matriks di bawah ini : $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Jawaban:

Untuk menentukan vektor singular kiri, dimulai dengan AA^T. Yaitu,

$$AA^T = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, menentukan nilai eigen dari AA^T , yaitu $\lambda = 10$ dan $\lambda = 12$.

Diperoleh nilai singular dari A yaitu $\sqrt{10}$ dan $\sqrt{12}$.

Untuk $\lambda = 10$, diperoleh :

$$(11-10)x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 = -x_2.$$

Maka vektor eigen $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 10$.

Untuk $\lambda = 12$, diperoleh

$$(11-12)x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 = x_2.$$

Maka vektor eigen $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 12$.

Dengan menormalisasikan u_1 dan u_2 diperoleh

$$\overline{u_1} = \frac{u_1}{|u_1|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ dan } \overline{u_2} = \frac{u_2}{|u_2|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Diperoleh $U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Selanjutnya, dicari nilai eigen dari

$$A^TA = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

dan nilai eigen dari A^TA, yaitu $\lambda = 0$, $\lambda = 10$ dan $\lambda = 12$.

Diperoleh nilai singular dari A yaitu 0, $\sqrt{10}$ dan $\sqrt{12}$.

Dengan mencari vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen diperoleh

$u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 0$

$u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 10$

$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 12$.

Akibatnya, vektor-vektor singular kanan yang orthonormal adalah

$$\overline{v_1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}; \overline{v_2} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \overline{v_3} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{30} \\ -5/\sqrt{30} \end{bmatrix}$$

Jadi, $V^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{30} & 2/\sqrt{30} & -5/\sqrt{30} \end{bmatrix}$

Dari proses di atas, diperoleh SVD matriks tersebut adalah

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{30} & 2/\sqrt{30} & -5/\sqrt{30} \end{bmatrix}$$

3. Nyatakan bilangan kompleks berikut ini dalam bentuk polar dan eksponen : $z = \sqrt{3} + i$

Jawaban:

Dari masalah di atas, kita mempunyai $z = \sqrt{3} + i$, $r = \sqrt{3+1} = 2$ dan $\tan\ \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Karena z di kuadran pertama, maka dipilih $\theta = \frac{\pi}{6}$, sehingga didapat bentuk polar $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ dan bentuk eksponen $z = 2e^{\pi i/6}$.

4. Diberikan quaternion q1= 1 + i - 2j + 3k, q2 = 2 - 3i + j - 2k, hitunglah :
   a). q1 – q2   b). 2q1 + 3q2   c). q1 q2   d). q1/q2

Jawaban:

a). q1-q2 = -1 + 4i -3j + 5k

b). 2q1 + 3q2 = 8 -7i – j

c). q1 q2 = 13 – 10j – k

d). q1/q2 = -1/2 + 2/9i + 1/9j + 13/18 k

5. a) Selesaikan SPL Ax = b berikut dengan metode dekomposisi LU. Metode pemfaktorkan A menjadi L dan U yang digunakan adalah metode reduksi Crout.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix},\ x = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

b) Tuliskan A sebagai hasil kali L dan U, verifikasi hasil perkaliannya.

Jawaban:

$$u_{11} = a_{11},\quad u_{12} = a_{12},\quad u_{13} = a_{13} \qquad \}\ \text{Baris pertama } U$$

$$\left.\begin{aligned} l_{21}u_1 &= a_{21} \rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} \\ l_{31}u_{11} &= a_{31} \rightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} \end{aligned}\right\}\ \text{Kolom pertama } L$$

$$\left.\begin{aligned} l_{21}u_{12} + u_{22} &= a_{22} \rightarrow u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} \\ l_{21}u_{13} + u_{23} &= a_{23} \rightarrow u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} \end{aligned}\right\}\ \text{Baris kedua } U$$

$$l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = a_{32} \rightarrow l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} \qquad \text{Kolom kedua } L$$

$$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = a_{33} \rightarrow u_{33} = a_{33} - (l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23}) \quad \}\ \text{Baris ketiga } U$$

u11 = a11 = 2, u12 = a12 = 2, u13 = a13 = -2

l21 = a21/u11 = 4/2 = 2

l31 = a31/u12 = -2/2 = -1

u22 = a22 – l21u12 = 4 – (2)(2) = 0 → tidak boleh nol

Pertukarkan baris kedua dengan ketiga:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \;\; b = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ulang lagi menghtung l21, l31, dan u22

l21 = a21/u11 = -2/2 = -1

l31 = a31/u12 = 4/2 = 2

u22 = a22 – l21u12 = 2 – (-1)(2) = 4

u23 = a23 – l21u13 = 4 – (-1)(-2) = 2

l32 = (a32 – l31u12)/u22 = (4 – (2)(2))/4 = 0/4 = 0

u33 = a33 – (l31u13 – l32u23) = 1 – ((2)(-2) – (0)(2)) = 5

Jadi,

$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Solusi SPL:

Ly = b → $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

y1 = 5

y2 = -1 + y1 = -1 + 5 = 4

y3 = -2y1 = (-2)(5) = -10

Ux = y → $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix}$

5x3 = -10 → x3 = -2

4x2 + 2x3 = 4 → x2 = (4 – 2x3)/4 = (4 + 4)/4 = 2

2x1 + 2x2 – 2x3 = 5 → x1 = (5 – 2x2 + 2x3)/2 = (5 – 4 – 4)/2 = -1,5

Solusi (x1, x2, x3) =(-1.5, 2, -2)

b) LU = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ = A yang sudah diperutkarkan baris

6. Diberikan sebuah vektor p = (1,2,3). Vektor p diputar sebesar 240 derajat berlawanan arah jarum jam dengan sumbu putarnya adalah u = (1,1,1). Hitunglah vektor bayangan dari p (misal p') dengan rotasi diatas.

Jawaban:

u = (1, 1, 1) →) $\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$

p = (1, 2, 3) = **i** +2**j** + 3**k** → **p** dalam quaternion p = 0 + i + 2j + 3k

q= cos(θ/2) + sin(θ/2)$\hat{\mathbf{u}}$ = cos 120° + sin 120°($\frac{1}{\sqrt{3}}$ (i + j + k)

$= \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{\sqrt{3}}$ (i + j + k) $= \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}$ (i + j + k) $= \frac{1}{2}$ (-1 + i + j + k)

q^{-1} = cos(θ/2) - sin(θ/2)$\hat{\mathbf{u}}$ = cos 120° - sin 120°($\frac{1}{\sqrt{3}}$ (i + j + k)

$= \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{\sqrt{3}}$ (i + j + k) $= \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}$ (i + j + k) $= \frac{1}{2}$ (-1 - i - j - k)

p' = qpq^{-1} = $\frac{1}{2}$ (-1 + i + j + k)(0 + i + 2j + 3k) $\frac{1}{2}$ (-1 - i - j - k) = $\frac{1}{4}$ (-1 + i + j + k)(0 + i + 2j + 3k)(-1 - i - j - k)

= $\frac{1}{4}$ (0 + 8i + 12j+ 4k) = 0 + 2i + 3j + k

Jadi bayangan vektor **p** adalah **p'** = (2, 3, 1) = 2**i** + 3**j** + **k**

Nilai setiap soal: soal 1 = 24, soal 2 = 20, soal 3 = 10, soal 4 = 16, soal 5 = 15, soal 6 = 15
