Solusi Kuis 2 IF2123 Aljabar Linier dan Geometri Nama: …………………………………

5 Oktober 2022 NIM: …………………………………..

Waktu: 90 menit Tanda-tangan: ………………………
Sifat: Closed book

Kerjakan soal-soal di bawah dengan teliti. Jangan lupa berdoa terlebih dahulu.

1. (NILAI: 5 + 5 + 5) Diketahui tiga buah vektor **u** = (–2 , –1, 4, 5), **v** = (3, 1, –5, 7), dan **w** = (–6, 2,1, 1). Hitung:
   a) $\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$
   b) $\|-\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|\mathbf{w}\|$
   c) $\|3\mathbf{u}\| - \|5\mathbf{v}\| - \|-\mathbf{w}\|$

   Jawaban:
   a) $3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}$ = 3(–2 , –1, 4, 5) – 5(3, 1, –5, 7) + (–6, 2,1, 1)
   = (–6 , –3, 12, 15) – (15, 5, –25, 35) + (–6, 2,1, 1) = (–27, –6, 38, –19)
   $\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \sqrt{(-27)^2 + (-6)^2 + (38)^2(-19)^2} = \sqrt{2570}$ = 50,69

   b) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ = (-5, -2, 9, -2)
   $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{114}$
   $-\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|\mathbf{w}$ = -$\sqrt{114}$ (–6, 2,1, 1) = (6$\sqrt{114}$, -2$\sqrt{114}$, $\sqrt{114}$, $\sqrt{114}$)
   $\|-\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|\mathbf{w}\| = \sqrt{(6\sqrt{114})^2 + (-2\sqrt{114})^2 + (\sqrt{114})^2 + (\sqrt{114})^2}$

   $= \sqrt{4104 + 456 + 114 + 114} = \sqrt{4788}$ = 69,196

   c) 3**u** = 3(–2 , –1, 4, 5) = (–6 , –3, 12, 15), $\|3\mathbf{u}\| = 3\sqrt{46}$
   5**v** = 5(3, 1, –5, 7) = (15, 5, –25, 35), $\|5\mathbf{v}\| = 10\sqrt{21}$
   –**w** = –(–6, 2,1, 1) = (6, -2, -1, -1), $\|-\mathbf{w}\| = \sqrt{42}$
   $\|3\mathbf{u}\| - \|5\mathbf{v}\| - \|-\mathbf{w}\| = 3\sqrt{46} - 10\sqrt{21} - \sqrt{42}$ = -31,96

2. (NILAI: 5 + 5) Diketahui persamaan dua buah bidang: 2x – y – z = 5 dan –4x + 2y + 2z = 12
   a) Tunjukkan bahwa kedua bidang tersebut parallel
   b) Hitung jarak kedua buah bidang tersebut

   Jawaban:
   a) 2x – y – z – 5 = 0 → $\mathbf{n_1}$ = (2, -1, -1)
   –4x + 2y + 2z – 12 = 0 → $\mathbf{n_2}$ = (-4, 2, 2)
   Karena $\mathbf{n_2} = -2\mathbf{n_1}$, maka vektor normal kedua bidang tersebut sejajar, berarti dua buah bidang tersebut paralel

   b) Pilih sebuah titik di bidang 2x – y – z – 5 = 0, misalkan ambil y = 0, z = 0, maka x = (y + z + 5)/2 = 5/2 = 2,5 diperoleh titik (5/2, 0, 0). Hitung jarak dari (3, 0, 0) ke bidang –4x + 2y + 2z – 12 = 0 sbb:

$$d = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{\left|(-4)\left(\frac{5}{2}\right)+(2)(0)+(2)(0)-12\right|}{\sqrt{(-4)^2+(2)^2+(2)^2}} = \frac{|-10-12|}{\sqrt{16+4+4}} = \frac{22}{\sqrt{24}} = \frac{22}{\sqrt{24}} \times \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{24}} = \frac{11}{12}\sqrt{24}$$

3. (NILAI: 5 + 5 + 5) Diketahui vektor **u** = (5, -2, 1), **v** = (4,-1,1), dan **w** = (1,-1,0) memiliki titik asal yang sama
   a) Tunjukkan bahwa ketiga vektor tersebut terletak pada bidang yang sama.
   b) Dengan menggunakan nomal bidang, tentukan persamaan bidang pada soal a) di atas
   c) Tentukan jarak dari titik P(3, -2, 0) ke bidang pada soal a) di atas

Jawaban:

a) Ada banyak cara untuk menunjukkan tiga buah vektor terletak dalam satu bidang yang sama, salah satunya adalah dengan menunjukkan bahwa volume parallelpide yang dibentuk oleh ketiga vektor tersebut sama dengan nol.

$$V = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Karena volume parallelpide sama dengan 0, maka tiga buah vektor tersebut terletak pada satu bidang

b) Persamaan bidang:
Tentukan normal terlebih dahulu

n = **u** × **v** = (5, -2, 1) × (4,-1,1) = (-1, -1, 3)

Persamaan bidang dengan **n** = (a, b, c) = (-1, -1, 3) dan melalui (x0, y0, z0) = (5, -2, 1) sebagai acuan adalah:

a(x – x0) + b(y – y0) + c(z – z0) = 0
-(x – 5) – 1(y + 2) + 3(z – 1) = 0
-x + 5 – y – 2 + 3z - 3 = 0
x + y - 3z = 0

Jika menggunakan titik (4,-1,1) sebagai acuan, maka

a(x – x0) + b(y – y0) + c(z – z0) = 0
-(x – 4) – 1(y + 1) + 3(z – 1) = 0
-x + 4 – y – 1 + 3z - 3 = 0
x + y - 3z = 0

Jika menggunakan titik (1,-1,0) sebagai acuan, maka

a(x – x0) + b(y – y0) + c(z – z0) = 0
-(x – 1) – 1(y + 1) + 3(z – 0) = 0
-x + 1 – y – 1 + 3z - 0 = 0
x + y - 3z = 0

Hasilnya sama

c) Tentukan jarak dari titik P(3, -2, 0) ke bidang x + y - 3z = 0 adalah

$$d = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|(1)(3)+(1)(-2)+(-3)(0)+0|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(-3)^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{11}} \times \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} = \frac{1}{11}\sqrt{11}$$

4. (NILAI: 10 + 10 + 5) Diberikan sebuah matrik A sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -7 & 0 & -6 \\ -1 & 3 & -2 & 1 & -3 \\ -3 & 8 & -9 & 1 & -9 \end{bmatrix}$$

a) Tentukan basis dari ruang baris dan basis dari ruang kolom

b) Tentukan basis dari ruang baris dengan membentuk terlebih dahulu A^T
(basis-basis nya terdiri dari vector-vektor baris semula)

c) Tentukan rank(A) dan nullity(A)

Jawaban:

Dengan OBE diperoleh matrik eselon sbb:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a). Basis dari ruang baris adalah

r1 = (1 0 11 0 3) bisa juga r1 = (1 -2 5 0 3)

r2 = (0 1 3 0 0) bisa juga r2 = (-2 5 -7 0 -6)

r3 = (0 0 0 1 0) bisa juga r3 = (-1 3 -2 1 -3)

r1,r2, dan r3 boleh dikembalikan ke baris-baris semula pada matriksnya

Basis dari ruang kolom adalah: (HARUS dikembalikan ke matriks semula)

c1 = $(1\ \ -2\ \ -1\ \ -3)^T$

c2 = $(-2\ \ 5\ \ 3\ \ 8)^T$

c4 = $(0\ \ 0\ \ 1\ \ 1)^T$

b). Matriks semula di transpose kemudian dibentuk matriks eselon di peroleh

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Basis ruang kolom dari matriks transpose diatas adalah

c1 = (1 -2 5 0 3)

c2 = (-2 5 -7 0 -6)

c3 = (-1 3 -2 1 -3)

c1, c2 dan c3 sama dengan jawaban pertanyaan a). tetapi dengan cara lain.

d) rank(A) = 3, nullity(A) = n – rank(A) = 5 – 3 = 2

5.

Misalkan

$\left\{\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ adalah basis bagi R^3.

$T: R^3 \to P_1$ Transformasi linear didefinisikan $T(\overrightarrow{v_i}) = A\overrightarrow{v_i} = p_i$ untuk setiap $i = 1,2,3$.

Jika

$p_1 = 1 - x;\ p_2 = 1;\ p_3 = 2x$

a. (NILAI : 20)
   Carilah matriks transformasi T

b. (NILAI : 15)

   Tentukan hasil transformasi dari $T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Jawaban: P_1 artinya ruang polinom derajat 1, setiap polinom ditulis dalam bentuk $p(x) = a_0 + a_1x$

a)

Jadi, $\mathbf{p_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Karena $A\mathbf{v_i} = \mathbf{p_i}$, maka,

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Jadi, matriks transformasi T adalah

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + x$$