Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Solusi Ujian Tengah Semester
IF2123 Aljabar Linier dan Geometri
Semester I tahun akademik 2022/2023
Rabu, 12 Oktober 2022
Waktu: 100 menit

A. Soal Pilihan Ganda

Pilihlah satu jawaban yang benar, dan pindahkan jawaban anda (huruf A sampai F) ke lembar jawaban.

1. Jika A adalah matriks n x n, maka pernyataan yang SALAH tentang sistem persamaan linier homogen Ax = 0 adalah
   A. Jika A tidak memiliki balikan (*invers*), maka Ax = 0 memiliki solusi non-trivial
   B. Jika det(A) ≠ 0, maka Ax = 0 memiliki solusi trivial
   C. Ax = 0 tidak konsisten jika det(A) = 0
   D. Ax = 0 selalu konsisten untuk matriks A sembarang
   E. Jika det(A) = 0 maka Ax = 0 dapat dipecahkan.
   F. Tidak ada jawaban yang tepat

Jawaban: C

2. Diketahui matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 14 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Nilai M_{22} dan C_{22} berturut-turut adalah:
A. 48 dan –48 B. –48 dan –48 C. –48 dan 48
D. –96 dan 96 E. 96 dan –96 F. –96 dan –96
G. Tidak ada jawaban yang benar

Jawaban: B

3. Misalkan **v** = (–2, 3, 0, 6). Nilai k yang memenuhi sehingga $\|k\mathbf{v}\|$ = 5 adalah
A. 5/7 dan –5/7 B. 2/3 dan –2/3 C. 3/8 dan –3/8
D. 2/7 dan –2/7 E. 4/9 dan –4/9 F. Tidak ada jawaban yang benar

Jawaban: A

4. Luas segitiga yang dibentuk oleh titik sudut A(1, 0, 1), B(0, 2, 3) dan C(2, 1, 0) adalah
A. $\frac{\sqrt{19}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{21}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{26}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{31}}{4}$ E. $\frac{\sqrt{23}}{5}$ F. Tidak ada jawaban yang benar

Jawaban: F

5. Sistem Persamaan Linier berikut mempunyai solusi :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 \qquad\;\; + 8x_3 &= 17 \end{aligned}$$

A. tunggal B. banyak C. tidak ada solusi
D. trivial E. tidak ada jawaban yang benar

Jawaban: A

6. Jika diketahui persamaan matrik sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

maka matriks X yang memenuhi adalah:

A. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 16 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} -12 & 7 & -17 \\ 24 & -10 & 27 \\ 27 & -12 & 34 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} 11 & 12 & -3 \\ -6 & -8 & 1 \\ -15 & -21 & 9 \end{bmatrix}$
E. Tidak ada jawaban yang benar

Jawaban: D

7. Diberikan ruang vektor **V** = $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; 2x + 3y - z = 4 \right\}$, maka basis dari ruang vektor tersebut adalah :

A. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
E. Tidak ada jawaban yang benar

Jawaban: E

8. Ruang Polinom berderajat *n* mempunyai dimensi sebanyak :
A. n – 1 B. n C. n + 1 D. n + 2 E. n^2 F. Tidak ada jawaban yang benar

Jawaban: C

9. Diberikan dua buah vektor di R^3, **v1** = (–1,2,3) dan **v2** = (1,–2 , –2). Untuk membentuk basis di R^3 diperlukan sebuah vektor lagi yang bebas linier dengan kedua vektor tersebut. Diantara vektor berikut yang TIDAK bisa ditambahkan untuk basis adalah:
A. (–1,2,4) B. (1,2,4) C. (–1, –1, 2) D. (3,4,5) E. Tidak ada vektor yang bisa ditambahkan.

Jawaban: A

10. Diketahui basis B = {p_1,p_2}, B'={q_1,q_2} untuk suatu polinom P, dimana p_1=6 +3x, p_2=10+2x, q_1=2, q_2 = 3 + 2x, matriks transisi dari B' ke B untuk perubahan koordinat adalah :

A. $\begin{bmatrix} 3/4 & 7/2 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 3/4 & 7/2 \\ -2/9 & 7/9 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} -2/9 & 7/9 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} -2/9 & 7/9 \\ 1/3 & -1/6 \end{bmatrix}$ E. Tidak ada jawaban yang benar

Jawaban: D

11. Matriks transformasi standar dari rotasi berlawanan arah jarum jam terhadap sumbu y dengan sudut theta pada ruang vektor 3 dimensi adalah :

A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$ D. Semua jawaban salah

Jawaban: C

12. Diketahui sebuah matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks tersebut adalah matriks transformasi standar di ruang 3 dimensi untuk :

A. Refleksi terhadap bidang xy B. Refleksi terhadap bidang xz C. Refleksi terhadap bidang yz
D. Projeksi orthogonal terhadap bidang xy E. Projeksi orthogonal terhadap bidang xz
F. Projeksi orthogonal terhadap bidang yz G. Semua jawaban salah

Jawaban: E

13. Diketahui matriks di bawah ini :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cos\theta & -\frac{1}{2}\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Matriks tersebut adalah matriks transformasi dari :

A. Kontraksi dengan factor 0,5 diikuti oleh rotasi dengan sudut theta
B. Rotasi dengan sudut theta diikuti oleh kontraksi dengan factor 0,5
C. Kompresi dengan factor 0,5 diikuti oleh rotasi dengan sudut theta
D. Rotasi dengan sudut theta diikuti oleh kompresi dengan factor 0,5
E. Semua jawaban salah.

Jawaban: D

14. Diketahui vector u = (4,3,1,-2) dan vector v = (-2,1,2,3). Maka nilai kosinus dari sudut yang dibentuk oleh 2 vektor tersebut adalah -3/(2*sqrt(15)). Pernyataan ini adalah :

A. salah
B. benar
C. tidak bisa ditentukan.
D. semua jawaban salah.

Jawaban: B

15. Komposisi transformasi adalah bersifat komutatif. Pernyataan ini adalah :

A. salah
B. benar
C. tidak bisa ditentukan.
D. semua jawaban salah.

Jawaban: A

E. Soal Essay

Jawablah soal di bawah ini pada lembar jawaban

1. (a) Apa syarat sebuah himpunan vektor merupakan basis untuk ruang vektor V?
   (b) Tunjukkan bahwa {(1, 2, 3), (–4 , 5, 6), (7, –8, 9)} adalah basis untuk R^3
   (c) Tentukan koordinat vektor **v** = (5, –12, 3) relative terhadap basis {(1, 2, 3), (–4 , 5, 6), (7, –8, 9)} tersebut

Jawaban:

(a) Syarat sebuah himpunan vektor S merupakan basis untuk ruang vektor V adalah (i) vektor-vektor di dalam S bebas liner, (ii) vektor-vektor di dalam S membangun V, artinya sembarang vektor di V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor di dalam S

(b) Untuk menunjukkan bahwa **v1** = (1, 2, 3), **v2** = (–4 , 5, 6), **v3** = (7, –8, 9)} adalah basis untuk R^3, maka

i. Harus ditunjukkan bahwa **v1**, **v2**, dan **v3** bebas linier sbb:

$k_1(1, 2, 3) + k_2(-4, 5, 6) + k_3(7, -8 , 9) = 0$

Diperoleh SPL homogen:

$k_1 - 4k_2 + 7k_3 = 0$
$2k_1 + 5k_2 - 8k_3 = 0$
$3k_1 + 6k_2 + 9k_3 = 0$

Harus ditunjukkan bahwa solusi SPL adalah trivial yaitu $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$

ii. Harus ditunjukkan bahwa **v1**, **v2**, dan **v3** membangun R^3 sbb:

Misalkan vektor sembarang **w** = (w_1, w_2, w_3) di R^3 dapat dinyatakan sebagai **w** = k_1**v1** + k_2**v2** + k_3**v3**

$(w_1, w_2, w_3) = k_1(1, 2, 3) + k_2(-4, 5, 6) + k_3(7, -8 , 9)$

Diperoleh SPL:

$k_1 - 4k_2 + 7k_3 = w_1$
$2k_1 + 5k_2 - 8k_3 = w_2$
$3k_1 + 6k_2 + 9k_3 = w_3$

Harus ditunjukkan bahwa SPL di atas dapat dipecahkan (memiliki solusi unik).

Untuk (i) dan (ii) kita cukup menunjukkan bahwa matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 2 & 5 & -8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

mempunyai balikan (*invers*), yaitu $\det(A) \neq 0$. Karena $\det(A) = 240$ (periksa!), maka matriks A tersebut dapat dibalikkan.

Oleh karena itu, SPL homogen:

$k_1 - 4k_2 + 7k_3 = 0$
$2k_1 + 5k_2 - 8k_3 = 0$
$3k_1 + 6k_2 + 9k_3 = 0$

memiliki solusi trivial, dan SPL:

$k_1 - 4k_2 + 7k_3 = w_1$
$2k_1 + 5k_2 - 8k_3 = w_2$
$3k_1 + 6k_2 + 9k_3 = w_3$

dapat dipecahkan. Jadi, **v1**, **v2**, dan **v3** adalah basis untuk R^3.

(c) koordinat vektor **v** = (5, –12, 3) relative terhadap basis {(1, 2, 3), (–4 , 5, 6), (7, –8, 9)} adalah (k1, k2, k3) yang dihitung sebagai berikut:

(5, –12, 3) = k1(1, 2, 3) + k2(–4 , 5, 6) + k3(7, –8, 9)

Diperoleh SPL:

$k_1 - 4k_2 + 7k_3 = 5$
$2k_1 + 5k_2 - 8k_3 = -12$
$3k_1 + 6k_2 + 9k_3 = 3$

Solusinya adalah (k1, k2, k3) = (-2, 0, 1)

2. Diketahui T: $P2$ (Polinom orde 2) → R^2, yang dalam hal ini,

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a - b \\ a - c \end{pmatrix}$$

(d) Apakah T merupakan transformasi linier? Buktikan!

(e) Tentukan $T(1 + x + x^2)$

Jawaban:

a. Ambil 1 unsur sembarang R (contoh α) dan 2 unsur sembarang di $P2$, Misalkan $\vec{u} = u_1 + u_2x + u_3x^2, \vec{v} = v_1 + v_2x + v_3x^2$

- Akan ditunjukan bahwa $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T\big((u_1 + u_2x + u_3x^2) + (v_1 + v_2x + v_3x^2)\big)$$
$$= T\big((u_1+v_1) + (u_2 + v_2)x + (u_3+v_3)x^2\big)$$
$$= \begin{pmatrix} (u_1+v_1) - (u_2 + v_2) \\ (u_1+v_1) - (u_3+v_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (u_1+v_1) - (u_2 + v_2) \\ (u_1+v_1) - (u_3+v_3) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} u_1 + v_1 - u_2 - v_2 \\ u_1 + v_1 - u_3 - v_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} u_1 - u_2 + v_1 - v_2 \\ u_1 - u_3 + v_1 - v_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ u_1 - u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ v_1 - v_3 \end{pmatrix}$$
$$= T(u_1 + u_2x + u_3x^2) + T(v_1 + v_2x + v_3x^2)$$
$$= T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

- Akan ditunjukan bahwa $T(\alpha\vec{u}) = \alpha\, T(\vec{u})$

$$T(\alpha\vec{u}) = T(\alpha(u_1 + u_2x + u_3x^2))$$
$$= T(\alpha u_1 + \alpha u_2x + \alpha u_3x^2)$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha u_1 - \alpha u_2 \\ \alpha u_1 - \alpha u_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha(u_1 - u_2) \\ \alpha(u_1 - u_3) \end{pmatrix}$$
$$= \alpha \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ u_1 - u_3 \end{pmatrix} = \alpha\, T(u_1 + u_2x + u_3x^2) = \alpha\, T(\vec{u})$$

b. $T(1 + x + x^2) = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$