

Seri bahan kuliah Algeo #24

Aljabar Quaternion (Bagian 1)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika

STEI-ITB

2022

Sumber:

John Vince, *Geometric Algebra for Computer Graphics*. Springer. 2007

Bilangan Quaternion

- Ditemukan oleh Sir William Rowan Hamilton pada tahun 1843.
- Hamilton mencoba memperluas bilangan kompleks di \mathbb{R}^2 ke \mathbb{R}^3 :

$$z = a + bi + cj \quad (\text{triplets})$$

yang dalam hal ini, $i = j = \sqrt{-1}$ dan $i^2 = j^2 = -1$

Contoh: $z = 3 + 4i - 5j$



Sir William Rowan Hamilton

William Rowan Hamilton (1805–1865)



Lahir

4 Agustus 1805

[Dublin](#)

Meninggal

2 September 1865 (umur 60)

[Dublin](#)

Tempat tinggal

Ireland

Kebangsaan

[Irish](#)

Almamater

[Trinity College, Dublin](#)

[Hamilton's principle](#)

[Mekanika Hamiltonian](#)

[Hamiltonians](#)

[Persamaan Hamilton–Jacobi](#)

[Quaternions](#)

[Biquaternions](#)

[Hamiltonian path](#)

[Kalkulus Icosian](#)

[Simbol Nabla](#)

[Versor](#)

[Coining the word 'tensor'](#)

[Hamiltonian vector field](#)

[Icosian game](#)

[Algebra universal](#)

[Hodograph](#)

[Grup Hamiltonian](#)

[Teorema Cayley–Hamilton](#)

[Royal Medal](#) (1835)

Dikenal atas

Penghargaan

Karier ilmiah

Bidang

[Fisika](#), [astronomi](#), dan [matematika](#)

Institusi

Trinity College, Dublin

Sumber: Wikipedia

- Namun, jika dua buah bilangan kompleks di \mathbb{R}^3 dikalikan, meninggalkan masalah perkalian dua buah imajiner yang tidak terdefinisi, yaitu sbb:

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= (a_1 + ib_1 + jc_1)(a_2 + ib_2 + jc_2) \\ &= a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ja_1 c_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 + ijb_1 c_2 + jc_1 a_2 + jic_1 b_2 + j^2 c_1 c_2.\end{aligned}$$

Sulihkan $i^2 = j^2 = -1$ lalu susun ulang persamaan di atas menjadi:

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2) + j(a_1 c_2 + c_1 a_2) + ijb_1 c_2 + jic_1 b_2$$

Tetap meninggalkan perkalian ij dan ji yang tidak terdefinisi.

- Diceritakan di dalam sejarah bahwa putra Sir William Hamilton yang berusia 8 tahun bertanya kepadanya setelah sarapan pagi:

“Well, Papa, can you multiply triplets?” (triplets: $z = a + bi + cj$)

Hamilton menggeleng kepala dan dengan sedih berkata:

“No, I can only add and subtract them.”

Hamilton menjawab demikian karena dia tidak berhasil menemukan nilai perkalian ij dan ji .

- Hamilton tidak menyerah, lalu dia mencoba memperluas triplets menjadi quadruplets:

$$z = a + bi + cj + dk$$

- Misalkan

$$z_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$$

$$z_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$$

- Kalikan keduanya:

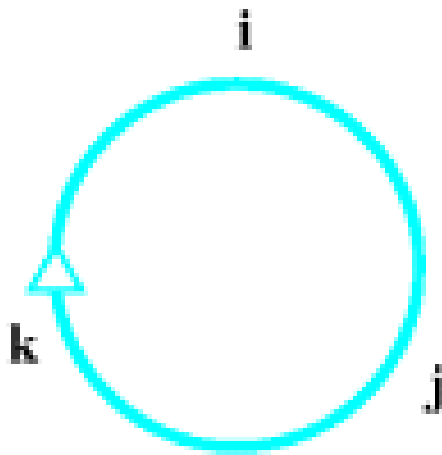
$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (a_1 + ib_1 + jc_1 + kd_1)(a_2 + ib_2 + jc_2 + kd_2) \\ &= a_1a_2 + ia_1b_2 + ja_1c_2 + ka_1d_2 \\ &\quad + ib_1a_2 + i^2b_1b_2 + ijb_1c_2 + ikb_1d_2 \\ &\quad + jc_1a_2 + jic_1b_2 + j^2c_1c_2 + jkc_1d_2 \\ &\quad + kd_1a_2 + kid_1b_2 + kjd_1c_2 + k^2d_1d_2. \end{aligned}$$

- Sulihkan $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, diperoleh:

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 \\ &+ i(a_1 b_2 + b_1 a_2) + j(a_1 c_2 + c_1 a_2) + k(a_1 d_2 + d_1 a_2) \\ &+ i j b_1 c_2 + i k b_1 d_2 + j i c_1 b_2 + j k c_1 d_2 + k i d_1 b_2 + k j d_1 c_2.\end{aligned}$$

- Namun, persamaan di atas masih tetap meninggalkan $ij, ik, ji, jk, ki,$ dan kj yang tidak terdefinisi.

- Pada tanggal 16 Oktober, ketika Hamilton sedang berjalan kaki bersama istrinya di sepanjang kanal di kota Dublin, guna menuju acara pertemuan di *Royal Society of Dublin*, Hamilton menemukan solusi untuk memecahkan persoalan tersebut dengan menggunakan hasil perkalian silang antara vektor-vektor satuan standar i , j , dan k :



$$ij = k$$

$$jk = i$$

$$ki = j$$

$$ji = -k$$

$$kj = -i$$

$$ik = -j$$

- Hamilton menulis grafiti pada tembok kanal hasil penemuannya itu tulisan berikut: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$







William Rowan Hamilton

Sulihkan nilai-nilai $ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j$ ke dalam persamaan yang terakhir:

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 \\ &+ i(a_1 b_2 + b_1 a_2) + j(a_1 c_2 + c_1 a_2) + k(a_1 d_2 + d_1 a_2) \\ &+ i j b_1 c_2 + i k b_1 d_2 + j i c_1 b_2 + j k c_1 d_2 + k i d_1 b_2 + k j d_1 c_2.\end{aligned}$$

menghasilkan:

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 \\ &+ i(a_1 b_2 + b_1 a_2) + j(a_1 c_2 + c_1 a_2) + k(a_1 d_2 + d_1 a_2) \\ &+ k b_1 c_2 - j b_1 d_2 - k c_1 b_2 + i c_1 d_2 + j d_1 b_2 - i d_1 c_2.\end{aligned}$$

- Susun ulang menjadi:

$$\begin{aligned}z_1 z_2 = & a_1 a_2 - (b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) \\ & + i(a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) \\ & + j(a_1 c_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2 - b_1 d_2) \\ & + k(a_1 d_2 + d_1 a_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2).\end{aligned}$$

- Hamilton menyebut quadruplets $z = a + bi + cj + dk$ itu sebagai “quaternion”.

- Misalkan

$$z_1 = a_1 + \underbrace{b_1i + c_1j + d_1k}_{\mathbf{v}_1} = a_1 + \mathbf{v}_1 \quad (\text{skalar} + \text{"vector"})$$

$$z_2 = a_2 + \underbrace{b_2i + c_2j + d_2k}_{\mathbf{v}_2} = a_2 + \mathbf{v}_2 \quad (\text{skalar} + \text{"vector"})$$

maka

$$z_1 z_2 = (a_1 + \mathbf{v}_1)(a_2 + \mathbf{v}_2) = a_1 a_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + a_1 \mathbf{v}_2 + a_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$$

yang dalam hal ini,

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2$$

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} = (c_1 d_2 - d_1 c_2)i - (b_1 d_2 - d_1 b_2)j + (b_1 c_2 - c_1 b_2)k$$

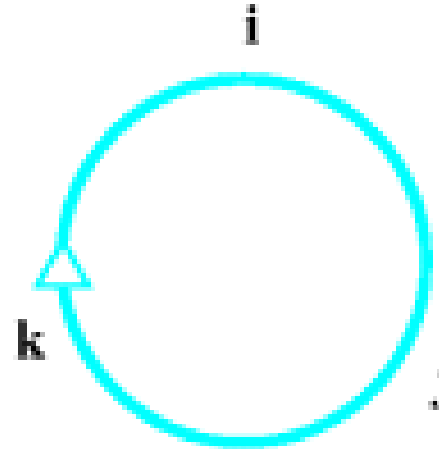
Ringkasan:

1. Bilangan quaternion (atau “quaternion” saja) adalah gabungan skalar dengan vektor, berbentuk

$$q = a + \mathbf{v} = a + bi + cj + dk = (a, \mathbf{v})$$

2. $ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j$

3. $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$



4. Perkalian dua quaternion $z_1 = a_1 + \mathbf{v}_1$ dengan $z_2 = a_2 + \mathbf{v}_2$ adalah

$$z_1 z_2 = (a_1 + \mathbf{v}_1)(a_2 + \mathbf{v}_2) = a_1 a_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + a_1 \mathbf{v}_2 + a_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$$

5. Di dalam aljabar vektor, i, j , dan k diubah menjadi vektor satuan \mathbf{i}, \mathbf{j} , dan \mathbf{k} , demikian sebaliknya

Contoh 1: Diberikan dua buah quaternion $q_1 = 1 + 2i + 3j + 4k$ dan $q_2 = 2 - i + 5j - 2k$

Hitung penjumlahan dan perkalian kedua quaternion

Jawaban:

(i) penjumlahan: $q_1 + q_2 = (1 + 2i + 3j + 4k) + (2 - i + 5j - 2k) = 3 + i + 8j + 2k$

(ii) perkalian: $q_1 q_2 = (a_1 + \mathbf{v}_1)(a_2 + \mathbf{v}_2) = a_1 a_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + a_1 \mathbf{v}_2 + a_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$

$$\mathbf{v}_1 = 2i + 3j + 4k \quad \text{dan} \quad \mathbf{v}_2 = -i + 5j - 2k$$

$$q_1 q_2 = (1 + 2i + 3j + 4k)(2 - i + 5j - 2k) = (1)(2) - \{(2)(-1) + (3)(5) + (4)(-2)\}$$

$$+ (1)(-i + 5j - 2k) + (2)(2i + 3j + 4k)$$

$$- 26i + 13k$$

$$= 2 - 5 - i + 5j - 2k + 4i + 6j + 8k - 26i + 13k$$

$$= -3 - 23i + 11j + 19k$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} k \end{aligned}$$

$$= (-6 - 20)i - (-4 + 4)j + (10 + 3)k = -26i + 13k$$

Perhatikan bahwa $q_2 q_1 = -3 + 29i + 11j - 7k$

$$q_1 q_2 \neq q_2 q_1$$

Perkalian q_1q_2 dapat juga dihitung secara aljabar tanpa menggunakan rumus

$$q_1q_2 = (a_1 + \mathbf{v}_1)(a_2 + \mathbf{v}_2) = a_1a_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + a_1\mathbf{v}_2 + a_2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$$

yaitu dengan cara mengalikan setiap elemen di dalam quaternion satu persatu sebagai berikut dan dengan mengingat bahwa

$$ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$\begin{aligned} q_1q_2 &= (1 + 2i + 3j + 4k)(2 - i + 5j - 2k) \\ &= 2 - i + 5j - 2k + 4i - 2i^2 + 10ij - 4ik + 6j - 3ji + 15j^2 - 6jk + 8k - 4ki + 20kj - 8k^2 \\ &= 2 - i + 5j - 2k + 4i - 2(-1) + 10k - 4(-j) + 6j - 3(-k) + 15(-1) - 6i + 8k - 4j + 20(-i) - 8(-1) \\ &= 2 - i + 5j - 2k + 4i + 2 + 10k + 4j + 6j + 3k - 15 - 6i + 8k - 4j - 20i + 8 \\ &= (2 + 2 - 15 + 8) + (-i + 4i - 6i - 20i) + (5j + 4j + 6j - 4j) + (-2k + 10k + 3k + 8k) \\ &= -3 - 23i + 11j + 19k \end{aligned}$$

- **Norma (*magnitude*) quaternion**

Quaternion: $q = a + bi + cj + dk$

Magnitude: $\|q\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$

Contoh: $q = 1 + 2i + 3j + 4k \rightarrow \|q\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{30}$

- **Quaternion satuan (unit)**

Quaternion: $q = a + bi + cj + dk$

Quaternion satuan: $\hat{q} = \frac{1}{\|q\|} (a + bi + cj + dk)$

Contoh: $q = 1 + 2i + 3j + 4k \rightarrow \hat{q} = \frac{1}{\sqrt{30}} (1 + 2i + 3j + 4k)$

- **Quaternion murni (*pure quaternion*)**

Quaternion murni adalah quaternion dengan skalar nol

$$q = bi + cj + dk$$

Perkalian dua quaternion murni tidak bersifat tertutup, sebab hasilnya adalah quaternion yang tidak murni.

$$q_1q_2 = (ix_1 + jy_1 + kz_1)(ix_2 + jy_2 + kz_2)$$

$$= [-(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) + i(y_1z_2 - y_2z_1) + j(z_1x_2 - z_2x_1) + k(x_1y_2 - x_2y_1)]$$

- **Bilangan quaternion sekawan (*conjugate*)**

quaternion: $q = a + \mathbf{v} = a + bi + cj + dk$

conjugate: $\bar{q} = a - \mathbf{v} = a - bi - cj - dk$

Contoh: $q = 1 + 2i + 3j + 4k \rightarrow \bar{q} = 1 - 2i - 3j - 4k$

Dapat ditunjukkan bahwa $q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

- **Balikan (*inverse*) quaternion**

Quaternion: $q = a + bi + cj + dk$

Balikan: $q^{-1} = \frac{1}{q} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$

Contoh: $q = 1 + 2i + 3j + 4k \rightarrow q^{-1} = \frac{1}{q} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = \frac{1-2i-3j-4k}{\|\sqrt{30}\|^2}$

$$= \frac{1-2i-3j-4k}{30}$$
$$= \frac{1}{30} - \frac{1}{15}i - \frac{1}{10}j - \frac{2}{15}k$$

Dapat ditunjukkan bahwa: $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$

Aksioma-aksioma di dalam Aljabar Quaternion

The axioms associated with quaternions are as follows:

Given $q, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{C}$:

Closure

For all q_1 and q_2

addition $q_1 + q_2 \in \mathbb{C}$

multiplication $q_1 q_2 \in \mathbb{C}$.

Identity

For each q there is an identity element $\mathbf{0}$ and $\mathbf{1}$ such that:

$$\text{addition} \quad q + \mathbf{0} = \mathbf{0} + q = q \quad (\mathbf{0} = 0 + i0 + j0 + k0)$$

$$\text{multiplication} \quad q(\mathbf{1}) = (\mathbf{1})q = q \quad (\mathbf{1} = 1 + i0 + j0 + k0).$$

Inverse

For each q there is an inverse element $-q$ and q^{-1} such that:

$$\text{addition} \quad q + (-q) = -q + q = 0$$

$$\text{multiplication} \quad qq^{-1} = q^{-1}q = 1 \quad (q \neq 0).$$

Associativity

For all q_1, q_2 and q_3

$$\text{addition } q_1 + (q_2 + q_3) = (q_1 + q_2) + q_3$$

$$\text{multiplication } q_1(q_2q_3) = (q_1q_2)q_3.$$

Commutativity

For all q_1 and q_2

$$\text{addition } q_1 + q_2 = q_2 + q_1$$

$$\text{multiplication } q_1q_2 \neq q_2q_1.$$

Distributivity

For all q_1, q_2 and q_3

$$q_1(q_2 + q_3) = q_1q_2 + q_1q_3$$

$$(q_1 + q_2)q_3 = q_1q_3 + q_2q_3.$$

Latihan 1

1. Hitunglah

Problem 1. $(2 + 3i + j - k) + (4 + 5i - 2j + 6k)$

Problem 2. $(3 + 3i + 2j + 2k) - (6 - 4i + 3j + 5k)$

Problem 3. $(-2 - \frac{1}{2}i - 2j + \frac{2}{5}k) + (\frac{1}{3} + 2i + \frac{1}{4}j + k)$

Problem 4. $(3 + 3i + 5j + 2k)(6 + 4i + j + k)$

Problem 5. $(8 - 2i + 3j - k)(8 + 2i - 3j + k)$

Problem 6. $\frac{1}{8 - 2i + 3j - k}$.

Problem 7. $\frac{1}{-i + 3j - 5k}$.

2. Diberikan quaternion $q = 2 + 4i - 3j + 5k$ dan $r = -3 + 5i - 8j + 10k$.
Hitunglah :

a). qr b). $\frac{1}{r}$ (*nilai 20*)

3. Diberikan dua quaternion $p = 2 + 2i + 3j + 4k$ dan $q = 3 - i + 5j - 2k$,
hitunglah :

1). $2p - 3q$

2). $(p + q)(p + q)^{-1}$

3). $(p q)(p q)^{-1}$.

4. Diberikan dua quaternion $z_1 = 10 + 3i - 5j + 6k$ dan $z_2 = 5 - 2i + 4j + 7k$,
hitunglah:

a). z_1^{-1} dan z_2^{-1}

b). $z_1 z_2$

c). $z_1 z_2^{-1}$.

Bersambung