Seri bahan kuliah Algeo #24

Aljabar Quaternion (Bagian 1)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB
2022

Sumber:

John Vince, *Geometric Algebra for Computer Graphics*. Springer. 2007

Bilangan Quaternion

- Ditemukan oleh Sir William Rowan Hamilton pada tahun 1843.

- Hamilton mencoba memperluas bilangan kompleks di R^2 ke R^3:

$$z = a + bi + cj \qquad \text{(triplets)}$$

yang dalam hal ini, $i = j = \sqrt{-1}$ dan $i^2 = j^2 = -1$

Contoh: $z = 3 + 4i - 5j$

Sir William Rowan Hamilton

Sumber: Wikipedia

William Rowan Hamilton (1805–1865)

Lahir	4 Agustus 1805 Dublin
Meninggal	2 September 1865 (umur 60) Dublin
Tempat tinggal	Ireland
Kebangsaan	Irish
Almamater	Trinity College, Dublin
Dikenal atas	Hamilton's principle Mekanika Hamiltonian Hamiltonians Persamaan Hamilton–Jacobi Quaternions Biquaternions Hamiltonian path Kalkulus Ikosian Simbol Nabla Versor Coining the word 'tensor' Hamiltonian vector field Icosian game Algebra universal Hodograph Grup Hamiltonian Teorema Cayley–Hamilton
Penghargaan	Royal Medal (1835)
Karier ilmiah	
Bidang	Fisika, astronomi, dan matematika
Institusi	Trinity College, Dublin

- Namun, jika dua buah bilangan kompleks di R^3 dikalikan, meninggalkan masalah perkalian dua buah imajiner yang tidak terdefinisi, yaitu sbb:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + ib_1 + jc_1)(a_2 + ib_2 + jc_2) \\ &= a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ja_1 c_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 + ijb_1 c_2 + jc_1 a_2 + jic_1 b_2 + j^2 c_1 c_2. \end{aligned}$$

Sulihkan $i^2 = j^2 = -1$ lalu susun ulang persamaan di atas menjadi:

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2) + j(a_1 c_2 + c_1 a_2) + ijb_1 c_2 + jic_1 b_2$$

Tetap meninggalkan perkalian *ij* dan *ji* yang tidak terdefinisi.

- Diceritakan di dalam sejarah bahwa putra Sir William Hamilton yang berusia 8 tahun bertanya kepadanya setelah sarapan pagi:

  "Well, Papa, can you multiply triplets?" (triplets: $z = a + bi + cj$)

  Hamilton menggeleng kepala dan dengan sedih berkata:

  "No, I can only add and subtract them."

  Hamilton menjawab demikian karena dia tidak berhasil menemukan nilai perkalian *ij* dan *ji*.

- Hamilton tidak menyerah, lalu dia mencoba memperluas triplets menjadi quadruplets:

  $z = a + bi + cj + dk$

- Misalkan

$$z_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$$

- Kalikan keduanya:

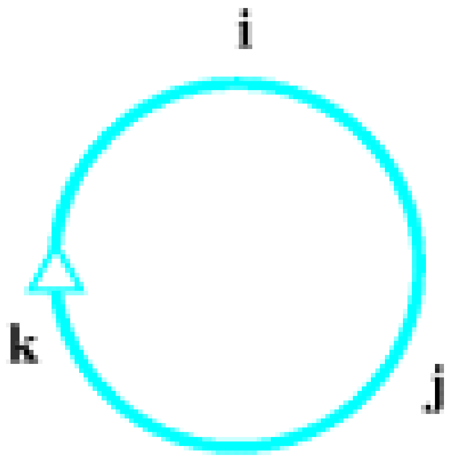
$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + ib_1 + jc_1 + kd_1)(a_2 + ib_2 + jc_2 + kd_2) \\ &= a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ja_1 c_2 + ka_1 d_2 \\ &\quad + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 + ijb_1 c_2 + ikb_1 d_2 \\ &\quad + jc_1 a_2 + jic_1 b_2 + j^2 c_1 c_2 + jkc_1 d_2 \\ &\quad + kd_1 a_2 + kid_1 b_2 + kjd_1 c_2 + k^2 d_1 d_2. \end{aligned}$$

- Sulihkan $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, diperoleh:

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 = {} & a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 \\
& + i(a_1 b_2 + b_1 a_2) + j(a_1 c_2 + c_1 a_2) + k(a_1 d_2 + d_1 a_2) \\
& + ij b_1 c_2 + ik b_1 d_2 + ji c_1 b_2 + jk c_1 d_2 + ki d_1 b_2 + kj d_1 c_2.
\end{aligned}
$$

- Namun, persamaan di atas masih tetap meninggalkan *ij*, *ik*, *ji*, *jk*, *ki*, dan *kj* yang tidak terdefinisi.

- Pada tanggal 16 Oktober, ketika Hamilton sedang berjalan kaki bersama istrinya di sepanjang kanal di kotaDublin, guna menuju acara pertemuan di *Royal Society of Dublin*, Hamilton menemukan solusi untuk memecahkan persoalan tersebut dengan menggunakan hasil perkalian silang antara vektor-vektor satuan standar *i*, *j*, dan *k*:



$ij = k$

$jk = i$

$ki = j$

$ji = -k$

$kj = -i$

$ik = -j$

- Hamilton menulis grafiti pada tembok kanal hasil penemuannya itu tulisan berikut: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$


Here as he walked by
on the 16th of October 1843
Sir William Rowan Hamilton
in a flash of genius discovered
the fundamental formula for
quaternion multiplication
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
& cut it on a stone of this bridge

William Rowan Hamilton

Sulihkan nilai-nilai $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$ ke dalam persamaan yang terakhir:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 \\ &+ i(a_1 b_2 + b_1 a_2) + j(a_1 c_2 + c_1 a_2) + k(a_1 d_2 + d_1 a_2) \\ &+ ijb_1 c_2 + ikb_1 d_2 + jic_1 b_2 + jkc_1 d_2 + kid_1 b_2 + kjd_1 c_2. \end{aligned}$$

menghasilkan:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 \\ &+ i(a_1 b_2 + b_1 a_2) + j(a_1 c_2 + c_1 a_2) + k(a_1 d_2 + d_1 a_2) \\ &+ kb_1 c_2 - jb_1 d_2 - kc_1 b_2 + ic_1 d_2 + jd_1 b_2 - id_1 c_2. \end{aligned}$$

- Susun ulang menjadi:

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 = a_1 a_2 &- (b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) \\
&+ i(a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) \\
&+ j(a_1 c_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2 - b_1 d_2) \\
&+ k(a_1 d_2 + d_1 a_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2).
\end{aligned}
$$

- Hamilton menyebut quadruplets $z = a + bi + cj + dk$ itu sebagai "**quaternion**".

- Misalkan

$$z_1 = a_1 + \underbrace{b_1 i + c_1 j + d_1 k}_{\boldsymbol{v_1}} = a_1 + \boldsymbol{v_1} \qquad \text{(skalar + “vector”)}$$

$$z_2 = a_2 + \underbrace{b_2 i + c_2 j + d_2 k}_{\boldsymbol{v_2}} = a_2 + \boldsymbol{v_2} \qquad \text{(skalar + “vector”)}$$

maka

$$\boxed{z_1 z_2 = (a_1 + \boldsymbol{v_1})(a_2 + \boldsymbol{v_2}) = a_1 a_2 - \boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_2} + a_1 \boldsymbol{v_2} + a_2 \boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_1} \times \boldsymbol{v_2}}$$

yang dalam hal ini,

$$\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_2} = b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2$$

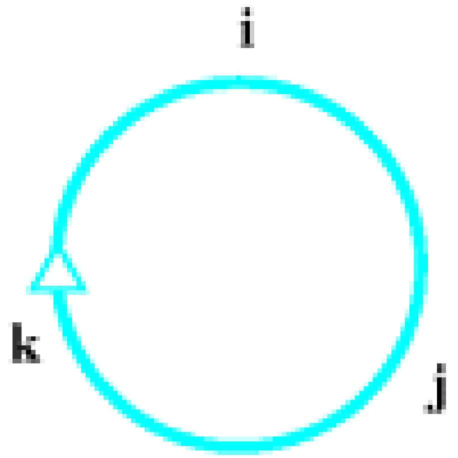
$$\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} = (c_1 d_2 - d_1 c_2)i - (b_1 d_2 - d_1 b_2)j + (b_1 c_2 - c_1 b_2)k$$

Ringkasan:

1. Bilangan quaternion (atau “quaternion” saja) adalah gabungan skalar dengan vektor, berbentuk

$$q = a + \mathbf{v} = a + bi + cj + dk = (a, \mathbf{v})$$

2. $ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j$



3. $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

4. Perkalian dua quaternion $z_1 = a_1 + \mathbf{v_1}$ dengan $z_2 = a_2 + \mathbf{v_2}$ adalah

$$z_1 z_2 = (a_1 + \mathbf{v_1})(a_2 + \mathbf{v_2}) = a_1 a_2 - \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} + a_1 \mathbf{v_2} + a_2 \mathbf{v_1} + \mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}$$

5. Di dalam aljabar vektor, *i*, *j*, dan *k* diubah menjadi vektor satuan **i**, **j**, dan **k** , demikian sebaliknya

Contoh 1: Diberikan dua buah quaternion $q_1 = 1 + 2i + 3j + 4k$ dan $q_2 = 2 - i + 5j - 2k$

Hitung penjumlahan dan perkalian kedua quaternion

<u>Jawaban</u>:

(i) penjumlahan: $q_1 + q_2 = (1 + 2i + 3j + 4k) + (2 - i + 5j - 2k) = 3 + I + 8j + 2k$

(ii) perkalian: $q_1q_2 = (a_1 + \mathbf{v_1})(a_2 + \mathbf{v_2}) = a_1a_2 - \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} + a_1\mathbf{v_2} + a_2\mathbf{v_1} + \mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}$

$v_1 = 2i + 3j + 4k$ dan $v_2 = - i + 5j - 2k$

$$q_1q_2 = (1 + 2i + 3j + 4k)(2 - i + 5j - 2k) = (1)(2) - \{(2)(-1)+(3)(5)+(4)(-2)$$

$$+ (1)(- i + 5j - 2k) + (2)(2i + 3j + 4k)$$

$$- 26i + 13k$$

$$= 2 - 5 - i + 5j - 2k + 4i + 6j + 8k - 26i + 13k$$

$$= -3 - 23i + 11j + 19k$$

$$\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} k$$

$$= (-6 - 20)i - (-4 + 4)j + (10 + 3)k = -26i + 13k$$

Perhatikan bahwa $q_2q_1 = -3 + 29i + 11j - 7k$

$$q_1q_2 \neq q_2q_1$$

Perkalian q_1q_2 dapat juga dihitung secara aljabar tanpa menggunakan rumus

$$q_1q_2 = (a_1 + \mathbf{v_1})(a_2 + \mathbf{v_2}) = a_1a_2 - \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} + a_1\mathbf{v_2} + a_2\mathbf{v_1} + \mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}$$

yaitu dengan cara mengalikan setiap elemen di dalam quaternion satu persatu sebagai berikut dan dengan mengingat bahwa

$$ij = k,\ jk = i,\ ki = j,\ ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$\begin{aligned}
q_1q_2 &= (1 + 2i + 3j + 4k)(2 - i + 5j - 2k) \\
&= 2 - i + 5j - 2k + 4i - 2i^2 + 10ij - 4ik + 6j - 3ji + 15j^2 - 6jk + 8k - 4ki + 20kj - 8k^2 \\
&= 2 - i + 5j - 2k + 4i - 2(-1) + 10k - 4(-j) + 6j - 3(-k) + 15(-1) - 6i + 8k - 4j + 20(-i) - 8(-1) \\
&= 2 - i + 5j - 2k + 4i + 2 + 10k + 4j + 6j + 3k - 15 - 6i + 8k - 4j - 20i + 8 \\
&= (2 + 2 - 15 + 8) + (-i + 4i - 6i - 20i) + (5j + 4j + 6j - 4j) + (-2k + 10k + 3k + 8k) \\
&= -3 - 23i + 11j + 19k
\end{aligned}$$

- **Norma (*magnitude*) quaternion**

  Quaternion: q = a + bi + cj + dk

  Magnitude: $\boxed{\|q\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}$

  Contoh: q = 1 + 2i + 3j + 4k $\rightarrow$ $\|q\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4} = \sqrt{30}$

- **Quaternion satuan (unit)**

  Quaternion: q = a + bi + cj + dk

  Quaternion satuan: $\boxed{\hat{q} = \frac{1}{\|q\|}(a + bi + cj + dk)}$

  Contoh: q = 1 + 2i + 3j + 4k $\rightarrow$ $\hat{q} = \frac{1}{\sqrt{30}}(1 + 2i + 3j + 4k)$

- **Quaternion murni (*pure quaternion*)**

  Quaternion murni adalah quaternion dengan skalar nol

  $$q = bi + cj + dk$$

  Perkalian dua quaternion murni tidak bersifat tertutup, sebab hasilnya adalah quaternion yang tidak murni.

  $$q_1q_2 = (ix_1 + jy_1 + kz_1)(ix_2 + jy_2 + kz_2)$$

  $$= [-(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) + i(y_1z_2 - y_2z_1) + j(z_1x_2 - z_2x_1) + k(x_1y_2 - x_2y_1)]$$

- **Bilangan quaternion sekawan (*conjugate*)**

  quaternion: $q = a + \mathbf{v} = a + bi + cj + dk$

  conjugate: $\bar{q} = a - \mathbf{v} = a - bi - cj - dk$

  Contoh: $q = 1 + 2i + 3j + 4k \rightarrow \bar{q} = 1 - 2i - 3j - 4k$

  Dapat ditunjukkan bahwa $\boxed{q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$

- **Balikan (*inverse*) quaternion**

Quaternion: q = a + bi + cj + dk

Balikan: $\boxed{q^{-1} = \frac{1}{q} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}}$

Contoh: q = 1 + 2i + 3j + 4k $\rightarrow q^{-1} = \frac{1}{q} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = \frac{1-2i-3j-4k}{\left\|\sqrt{30}\right\|^2}$

$$= \frac{1-2i-3j-4k}{30}$$

$$= \frac{1}{30} - \frac{1}{15}i - \frac{1}{10}j - \frac{2}{15}k$$

Dapat ditunjukkan bahwa: $\boxed{qq^{-1} = q^{-1}q = 1}$

Aksioma-aksioma di dalam Aljabar Quaternion

The axioms associated with quaternions are as follows:

Given $q, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{C}$:

Closure

For all q_1 and q_2

$$\text{addition} \quad q_1 + q_2 \in \mathbb{C}$$

$$\text{multiplication} \quad q_1 q_2 \in \mathbb{C}.$$

Identity

For each q there is an identity element $\mathbf{0}$ and $\mathbf{1}$ such that:

$$\text{addition} \quad q + \mathbf{0} = \mathbf{0} + q = q \ (\mathbf{0} = 0 + i0 + j0 + k0)$$

$$\text{multiplication} \quad q(\mathbf{1}) = (\mathbf{1})q = q \ (\mathbf{1} = 1 + i0 + j0 + k0).$$

Inverse

For each q there is an inverse element $-q$ and q^{-1} such that:

$$\text{addition} \quad q + (-q) = -q + q = 0$$

$$\text{multiplication} \quad qq^{-1} = q^{-1}q = 1 \ (q \neq 0).$$

Associativity

For all q_1, q_2 and q_3

$$\begin{aligned} \text{addition} \quad & q_1 + (q_2 + q_3) = (q_1 + q_2) + q_3 \\ \text{multiplication} \quad & q_1(q_2 q_3) = (q_1 q_2) q_3. \end{aligned}$$

Commutativity

For all q_1 and q_2

$$\begin{aligned} \text{addition} \quad & q_1 + q_2 = q_2 + q_1 \\ \text{multiplication} \quad & q_1 q_2 \neq q_2 q_1. \end{aligned}$$

Distributivity

For all q_1, q_2 and q_3

$$\begin{aligned} q_1(q_2 + q_3) &= q_1 q_2 + q_1 q_3 \\ (q_1 + q_2) q_3 &= q_1 q_3 + q_2 q_3. \end{aligned}$$

Latihan 1

1. Hitunglah

Problem 1. $(2+3i+j-k)+(4+5i-2j+6k)$

Problem 2. $(3+3i+2j+2k)-(6-4i+3j+5k)$

Problem 3. $(-2-\frac{1}{2}i-2j+\frac{2}{5}k)+(\frac{1}{3}+2i+\frac{1}{4}j+k)$

Problem 4. $(3+3i+5j+2k)(6+4i+j+k)$

Problem 5. $(8-2i+3j-k)(8+2i-3j+k)$

Problem 6. $\dfrac{1}{8-2i+3j-k}$.

Problem 7. $\dfrac{1}{-i+3j-5k}$.

2. Diberikan quarternion $q = 2 + 4i - 3j + 5k$ dan $r = -3 + 5i - 8j + 10k$. Hitunglah :

a). qr b). $\dfrac{1}{r}$ *(nilai 20)*

3. Diberikan dua quaternion $p = 2 + 2i + 3j + 4k$ dan $q = 3 - i + 5j - 2k$, hitunglah :

1). $2p - 3q$
2). $(p + q)(p + q)^{-1}$
3). $(p\ q)(p\ q)^{-1}$.

4. Diberikan dua quaternion $z_1 = 10 + 3i - 5j + 6k$ dan $z_2 = 5 - 2i + 4j + 7k$, hitunglah:

a). z_1^{-1} dan z_2^{-1}
b). $z_1\, z_2$
c). $z_1\, z_2^{-1}$.

Bersambung