Seri bahan kuliah Algeo #23

Aljabar Kompleks

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika

STEI-ITB

2022

Sumber:

1. John Vince, *Geometric Algebra for Computer Graphics*. Springer. 2007
2. Howard Anton & Chris Rores, *Elementary Linear Algebra, 10th Edition*

Bilangan Kompleks

- Bilangan kompleks berbentuk:

$$z = a + bi,$$

a adalah bagian riil $\rightarrow$ Re(z) = a

b adalah bagian imajiner $\rightarrow$ Im(z) = b

$i = \sqrt{-1}$ (sehingga $i^2 = -1$)

Contoh: $z = 3 + 2i$, $z = 6 - 14i$, $z = 16 - 13i$, dsb

- Simbol $i = \sqrt{-1}$ diperkenalkan oleh matematikawan Jerman, Leonhard Euler, pada tahun 1777
- Bagian riil (a) atau bagian imajiner (b) mungkin saja nol
- Jika $b = 0$, maka $z = a$ (bilangan riil), jika $a = 0$, maka $z = bi$ (bilangan kompleks).
- Ini berarti himpunan bilangan riil **R** adalah himpunan bagian (*subset*) dari himpunan bilangan kompleks **C**, yang dalam hal ini bagian imajinernya adalah nol.

- Konyugasi (*conjugate*) suatu bilangan kompleks sering dinamakan bilangan sekawan, ditulis sebagai z^*:

$$z^* = a - bi$$

Contoh: $z = 3 + 2i$, maka $z^* = 3 - 2i$

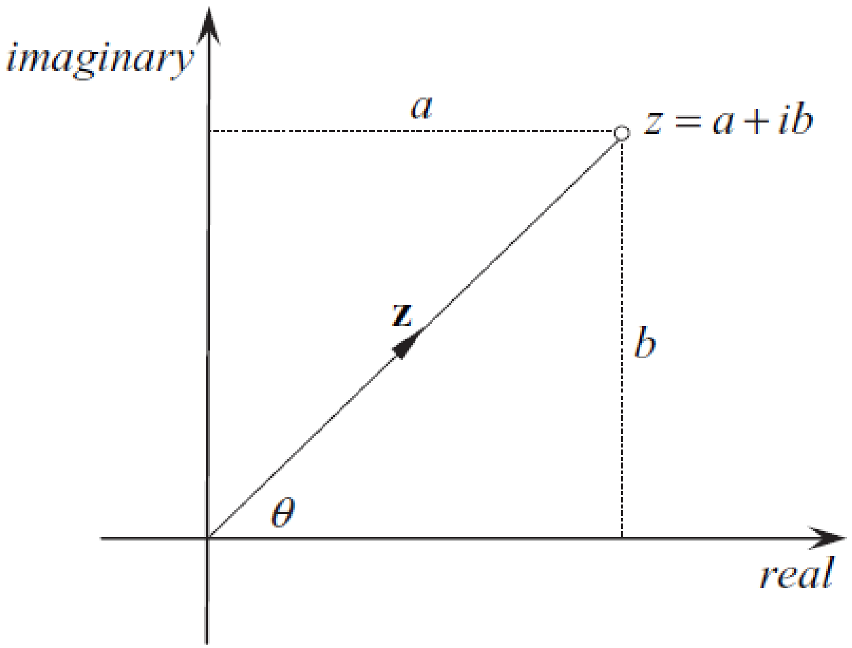
$z = 5 - 3i$, maka $z^* = 5 + 3i$

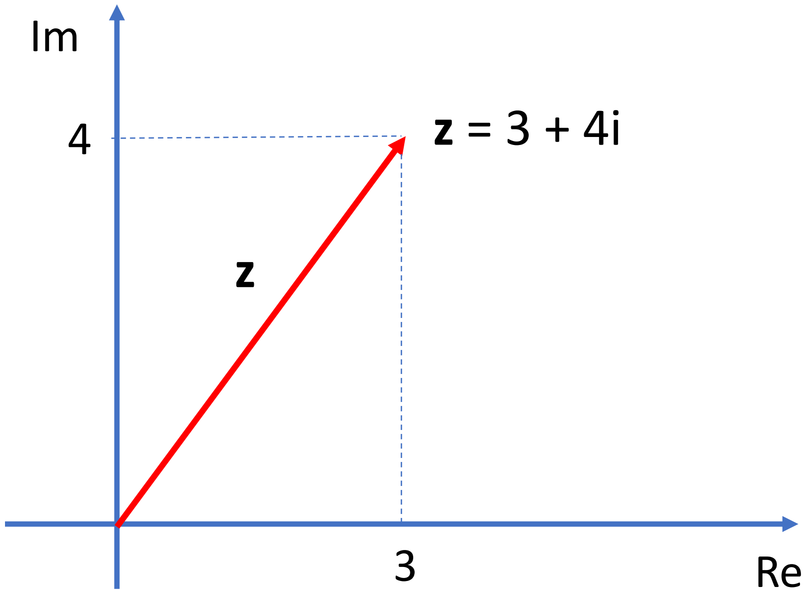
- i bersifat komutatif dengan skalar, jadi menuliskan ia atau ai adalah sama.

- Perhatikan pola sbb:

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i \ldots$$

- Diagram Argand menyajikan z = a + bi sebagai vektor:





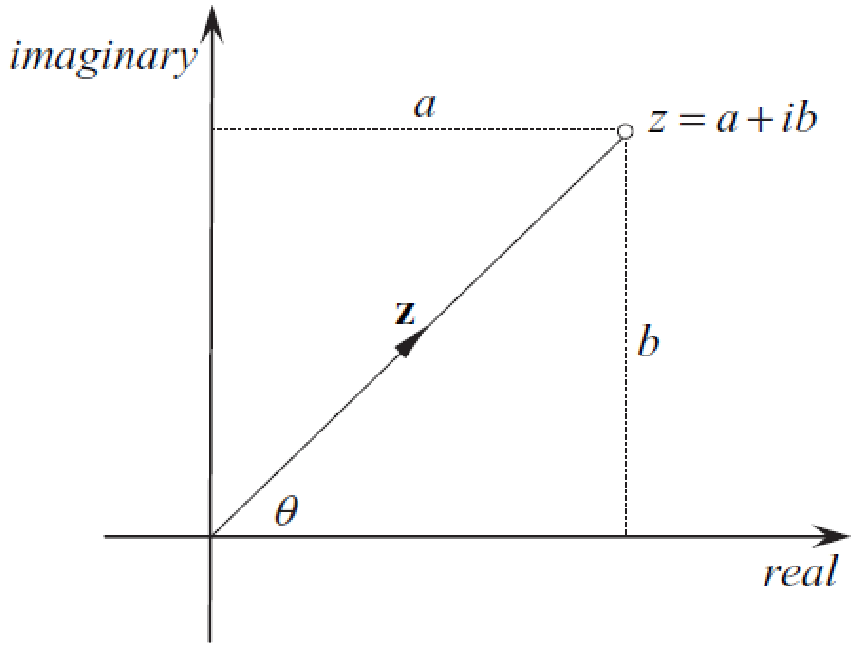
- Panjang *z* disebut modulus bilangan kompleks, dilambangkan dengan |*z*| :

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

- Sudut θ yang dibentuk sumbu mendatar dengan vektor dihitung dengan:

$\theta = \tan^{-1}(b/a)$



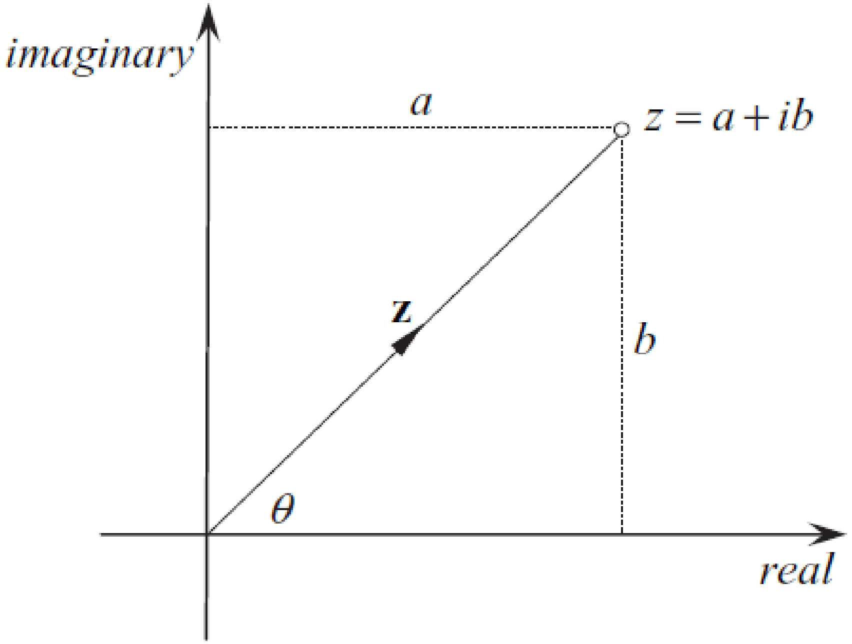
- Sudut yang dibentuk sumbu mendatar dengan vektor adalah θ.
- Untuk kuadran 1 dan 4, a > 0, maka

$$\theta = \tan^{-1}(b/a)$$

- Untuk kuadran 2 dan 3, a < 0, maka

$$\theta = 180^\circ + \tan^{-1}(b/a)$$

- Perhatikan kembali gambar ini:



$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \rightarrow a = |z|\cos(\theta)$$

$$\sin(\theta) = \frac{b}{|z|} \rightarrow b = |z|\sin(\theta)$$

- Jadi, $z = a + bi = |z|\cos(\theta) + i|z|\sin(\theta) = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

- Misalkan $|z| = r$, maka $z = a + bi = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \rightarrow z$ dalam bentuk polar

Operasi aritmetika bilangan kompleks

- Penjumlahan dua bilangan kompleks:

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i \quad + $$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

- **Contoh 1**: $(4 + 3i) + (2 - 5i) = 6 - 2i$.

- Perkalian dua bilangan kompleks:

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2$$

$$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i - b_1 b_2 \qquad \text{(karena } i^2 = -1\text{)}$$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i$$

- **Contoh 2:** $(2 + 3i)(4 - 5i) = (\,(2)(4) - (3)(-5)\,) + (\,(2)(-5) + (3)(4)\,)i = 23 + 2i$

- Perkalian bilangan kompleks dengan sekawannya: $zz^* = |z|^2$

- Pembagian bilangan kompleks:

Misalkan $z_1 = a_1 + ib_1$ dan $z_2 = a_2 + ib_2$

maka

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_2^*}{z_2^*} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \cdot \frac{a_2 - ib_2}{a_2 - ib_2}$$

Jadi,

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \cdot \frac{a_2 - ib_2}{a_2 - ib_2} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \\ &= \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) + i\left(\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right)\end{aligned}$$

- **Contoh 3:**

$$\begin{aligned}\frac{(4+i2)}{(3+i2)} &= \frac{(4+i2)}{(3+i2)} \cdot \frac{(3-i2)}{(3-i2)} \\ &= \frac{16-i2}{9+4} \\ &= \left(\frac{16}{13}\right) - i\left(\frac{2}{13}\right).\end{aligned}$$

- Ketiga contoh operasi aritmetika di atas memperlihatkan bahwa operasi penjumlahan, perkalian, dan pembagian bilangan kompleks selalu menghasilkan bilangan kompleks juga (sifat *closure* atau ketertutupan).

- Perkalian bilangan kompleks dengan bilangan kompleks sekawan lainnya:

Misalkan

$$z_1 = a_1 + ib_1$$

$$z_2 = a_2 + ib_2$$

dan

$$z_2^* = a_2 - ib_2$$

maka

$$z_1 z_2^* = (a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)$$

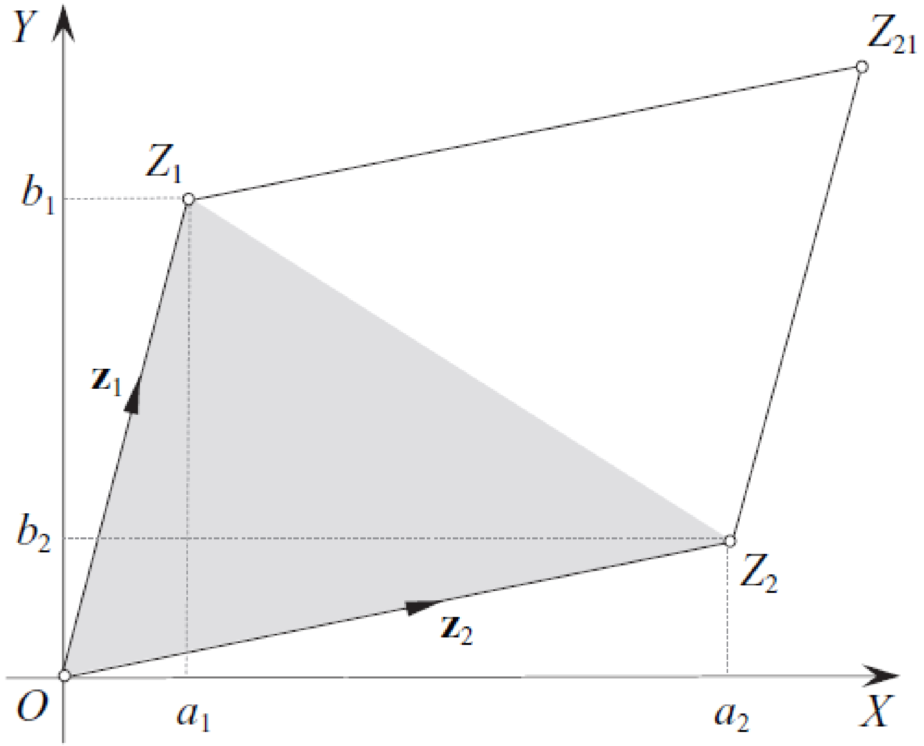
$$= (a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2).$$

Perhatikan bahwa $(a_2 b_1 - a_1 b_2)$ adalah perkalian titik (*dot product*) dua buah vektor, sedangkan bagian imajiner, $(a_2 b_1 - a_1 b_2)$, adalah bentuk determinan:

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

- Ingatlah kembali tafsiran determinan di dalam aljabar vektor, yaitu nilai mutlak determinan menyatakan luas area parallelogram yang yang dibentuk oleh dua buah vektor.

- Area parallelogram dibentuk oleh vektor z_1 dan z_2 : $\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$



Paralelogram = area $OZ_2Z_{21}Z_1$

Luas area $OZ_2Z_{21}Z_1$ = $|a_2b_1 - a_1b_2|$

Luas segitiga OZ_1Z_2 = ½ Luas area $OZ_2Z_{21}Z_1$

Aksioma-aksioma bilangan kompleks

Diberikan z_1, z_2, $z_3 \in$ **C**, maka aksioma-aksioma berikut berlaku:

Closure

For all z_1 and z_2

$$\text{addition} \quad z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$$

$$\text{multiplication} \quad z_1 z_2 \in \mathbb{C}.$$

Identity

For each z there is an identity element 0 and 1 such that:

$$\text{addition} \quad z + 0 = 0 + z = z \quad (0 = 0 + 0i)$$

$$\text{multiplication} \quad z\,(1) = (1)\,z = z \quad (1 = 1 + 0i)\,.$$

Inverse

For each z there is an inverse element $-z$ and $1/z$ such that:

$$\text{addition} \quad z + (-z) = -z + z = 0$$

$$\text{multiplication} \quad z\left(\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{1}{z}\right)z = 1 \quad (z \neq 0).$$

Associativity

For all z_1, z_2 and z_3

$$\text{addition} \quad z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

$$\text{multiplication} \quad z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3.$$

Commutativity

For all z_1 and z_2

$$\begin{aligned} \text{addition} \quad & z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \\ \text{multiplication} \quad & z_1 z_2 = z_2 z_1. \end{aligned}$$

Distributivity

For all z_1, z_2 and z_3

$$\begin{aligned} z_1(z_2 + z_3) &= z_1 z_2 + z_1 z_3 \\ (z_1 + z_2) z_3 &= z_1 z_3 + z_2 z_3. \end{aligned}$$

Fungsi *i* sebagai rotor

- Rotor: sumbu putaran
- *i* memiliki tafsiran geometri sebagai rotor
- Jika $a + bi$ dikalikan dengan i, maka hasilnya:

  $$i(a + bi) = ai + bi^2 = ai + b(-1) = -b + ai$$

- Jika $-b + ai$ dikalikan lagi dengan i, maka:

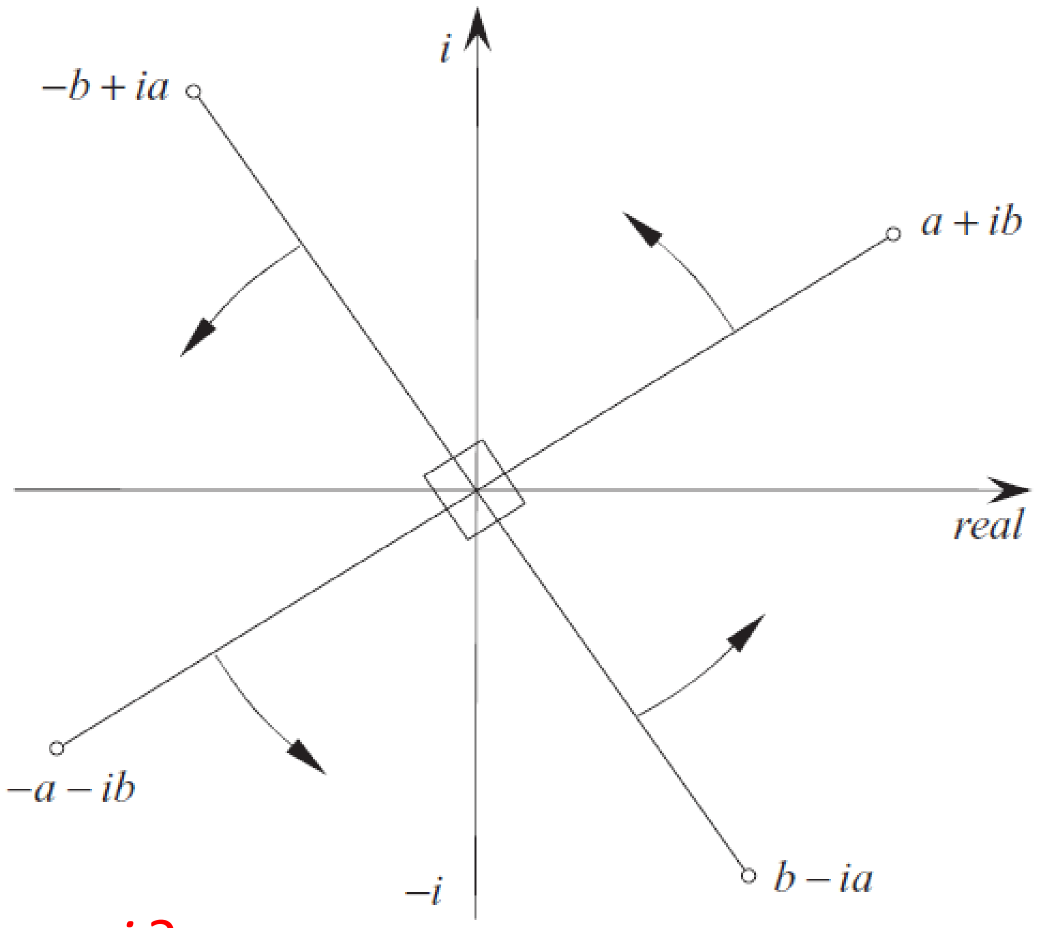
  $$i(-b + ai) = -bi + ai^2 = -a - bi$$

- Jika $-a - bi$ dikalikan lagi dengan i, maka:

  $$i(-a - bi) = -ai - bi^2 = b - ai$$

- Jika $b - ai$ dikalikan lagi dengan i, maka:

  $$i(b - ai) = bi - ai^2 = a + bi$$



Pertanyaan: apa hasilnya jika $a + bi$ dikaikan dengan $-i$?

Persamaan Euler

- Bilangan alam *e* didefinisikan sebagai berikut:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

atau dapat juga dinyatakan dalam bentuk deret McLaurin:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)$$

e^x dinyatakan dalam bentuk deret McLaurin sebagai berikut:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

- sin(x) dan cos(x), x dalam radian, dinyatakan dalam bentuk deret McLaurin:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots,$$

- Perpangkatan *e* dengan bilangan kompleks *ix* adalah sebagai berikut:

$$e^{ix} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{ix}{1!} + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \ldots + \frac{i^nx^n}{n!}\right)$$

disederhanakan menjadi

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} \ldots.$$

- Kumpulkan bagian riil dan bagian imajiner menjadi:

$$e^{ix} = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots}_{\cos(x)} + i\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots\right)}_{\sin(x)}$$

Jadi,

$$\boxed{e^{ix} = \cos(x) + i\,\sin(x)}$$

dan,

$$\boxed{e^{-ix} = \cos(x) - i\,\sin(x)}$$

atau,

$$\boxed{e^{\pm ix} = \cos(x) \pm i\,\sin(x)}$$

Persamaan yang terkenal ini dinamakan formula Euler

- **Contoh 4:** untuk x = π/2, maka

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = 0 + i\,(1) = i$$

untuk x = π, maka

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 - i(0) = -1$$

untuk x = 0, maka

$$e^{i0} = \cos(0) + i\sin(0) = 1 - i(0) = 1$$

untuk x = π/4, maka

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Apabila kita mengalikan $z = a + bi$ dengan $e^{i\pi}$ maka menjadi

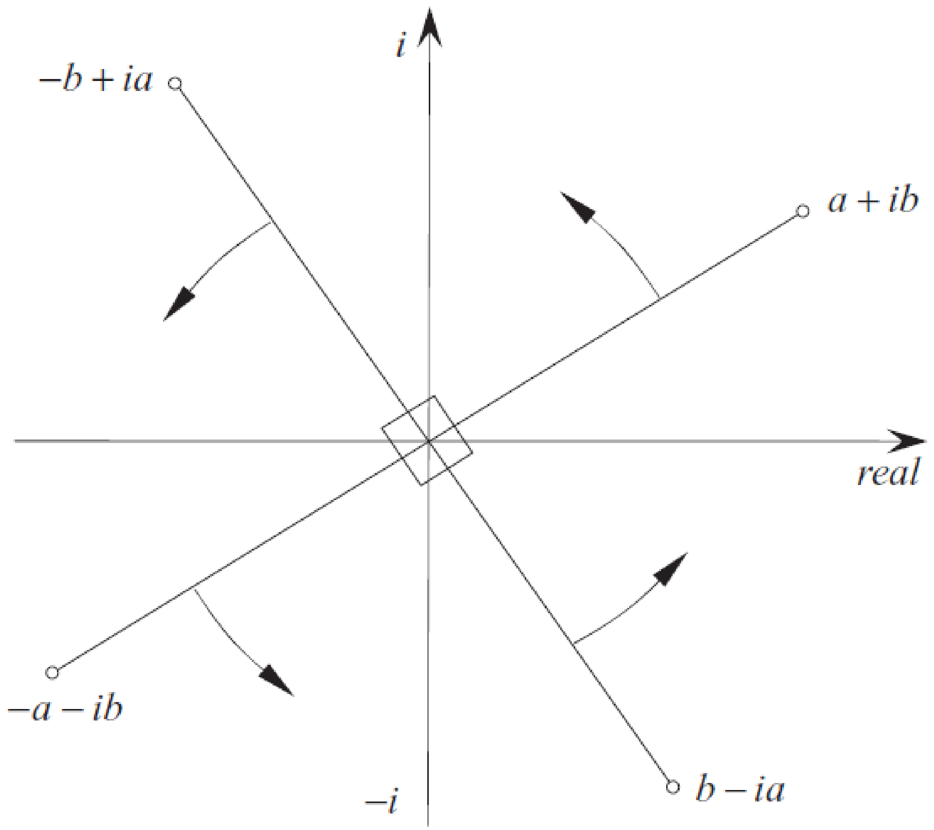
$$z' = ze^{i\pi} = z(-1) = -(a + bi) = -a - bi$$

yang diinterpretasikan sebagai memutar vektor *z* sejauh 180° berlawanan jarum jam

- Begitu juga, jika kita mengalikan $z = a + bi$ dengan $e^{i\frac{\pi}{2}}$ maka menjadi:

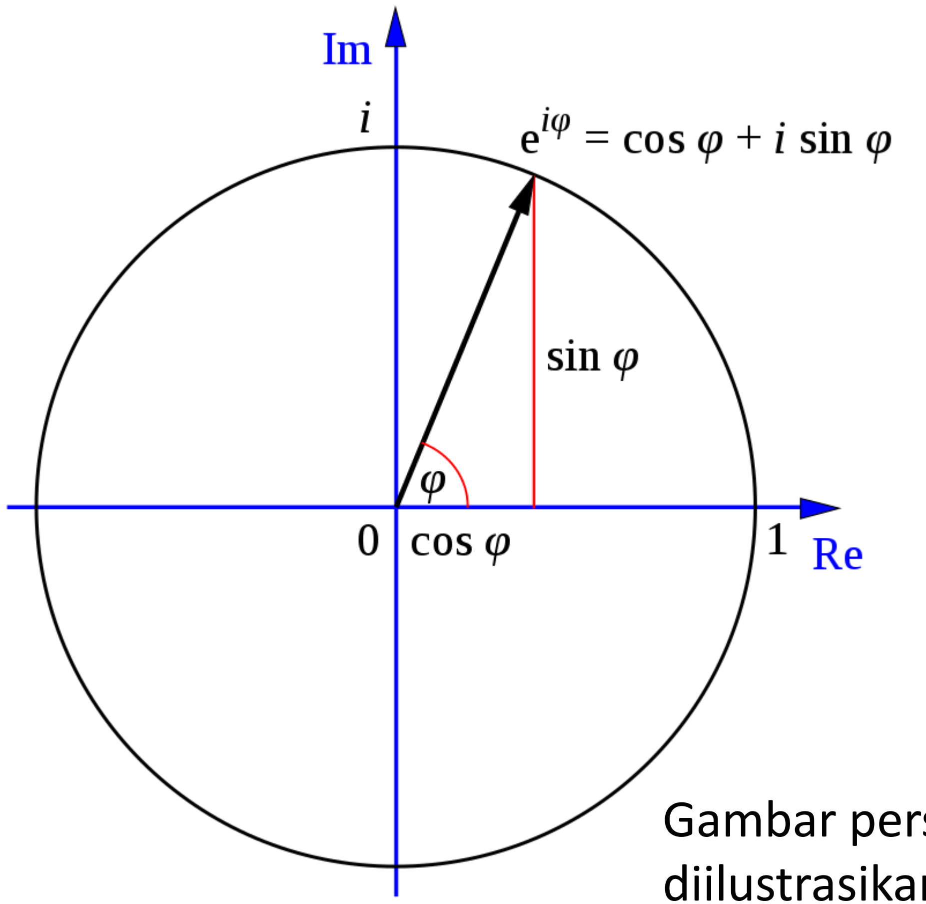
$$z' = ze^{i\frac{\pi}{2}} = zi = (a + bi)i = -b + ai$$

yang diinterpretasikan sebagai memutar vektor *z* sejauh 90° berlawanan arah jarum jam



- **Kesimpulan**: $e^{i\varphi}$ adalah sebuah rotor yang memutar *z* menjadi z' sejauh φ berlawanan arah jaum jam, yaitu $z' = ze^{i\varphi}$

Secara geometri diartikan $e^{i\varphi}$ terdapat di dalam lingkaran dengan jari-jari = 1 di dalam himpunan bilangan kompleks



Gambar persamaan $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ diilustrasikan di dalam bidang kompleks. (Sumber: Wikipedia)

Soal Latihan 1

1. Misalkan z_1 = 3 – 8i, z_2 = 5 + 10i, z_3 = –6i, z_4 = 5, hitunglah

   (i) z_1z_2 (ii) z_1z_3 (iii) $z_1z_2z_3$ (iv) z_1/z_2 (v) z_1/z_3 (vi) $z_1z_2^*$ (vi) $z_2^*z_3^*$

   (vii) $z_2z_4^*$ (ix) z_1^*/z_4^*

2. Hitunglah e^{ix} dan e^{-ix} untuk x = 60°

3. Sebuah bilangan kompleks z = 4 – 9i diputar sejauh 120 derajat **searah** jarum jam, tentukan bayangannya.

4. Berapakah i^i ? (hasilnya mengejutkan!)

Vektor di Ruang Kompleks

- Ruang vektor yang elemen-elemennya berbentuk bilangan kompleks dinamakan ruang vektor kompleks.
- Ruang vektor kompleks berorde-n dilambangkan dengan C^n.
- Setiap vektor di dalam C^n memiliki n-komponen, yaitu **v** = $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, dalam hal ini $v_1, v_2, \ldots, v_n$ adalah bilangan kompleks:

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (a_1 + b_1 i, a_2 + b_2 i, \ldots, a_n + b_n i)$$

- Contoh vektor-vektor di C^3:

$$\mathbf{u} = (1 + i, \ -4i, 3 + 2i), \quad \mathbf{v} = (0, i, 5), \quad \mathbf{w} = \left(6 - \sqrt{2}i, 9 + \frac{1}{2}i, \pi i\right)$$

- Setiap vektor

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (a_1 + b_1 i, a_2 + b_2 i, \ldots, a_n + b_n i)$$

di C^n dapat dipecah menjadi bagian riil dan bagian imajiner:

$$\mathbf{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + i(b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

yang juga dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{v} = \mathrm{Re}(\mathbf{v}) + i\ \mathrm{Im}(\mathbf{v})$$

dalam hal ini

$$\mathrm{Re}(\mathbf{v}) = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \text{dan} \quad \mathrm{Im}(\mathbf{v}) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

- Bentuk sekawan (*conjugate*) **v** adalah $\bar{\mathbf{v}}$

$$\bar{\mathbf{v}} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n) = (a_1 - b_1 i, a_2 - b_2 i, \ldots, a_n - b_n i)$$

- **Contoh 5:** Misalkan

$$\mathbf{v} = (3+i,\ -2i, 5) \quad \text{and} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+i & -i \\ 4 & 6-2i \end{bmatrix}$$

maka

$$\bar{\mathbf{v}} = (3-i, 2i, 5), \quad \mathrm{Re}(\mathbf{v}) = (3, 0, 5), \quad \mathrm{Im}(\mathbf{v}) = (1,\ -2, 0)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1-i & i \\ 4 & 6+2i \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Re}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Im}(A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1+i & -i \\ 4 & 6-2i \end{vmatrix} = (1+i)(6-2i) - (-i)(4) = 8+8i$$

Teorema-teorema Aljabar Vektor Kompleks

THEOREM 5.3.1

If $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ are vectors in C^n, and if k is a scalar, then:

(a) $\overline{\overline{\mathbf{u}}} = \mathbf{u}$

(b) $\overline{k\mathbf{u}} = \overline{k}\overline{\mathbf{u}}$

(c) $\overline{\mathbf{u} + \mathbf{v}} = \overline{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{v}}$

(d) $\overline{\mathbf{u} - \mathbf{v}} = \overline{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{v}}$

THEOREM 5.3.2

If A is an $m \times k$ complex matrix and B is a $k \times n$ complex matrix, then:

(a) $\overline{\overline{A}} = A$

(b) $\left(\overline{A^T}\right) = (\overline{A})^T$

(c) $\overline{AB} = \overline{A}\ \overline{B}$

Perkalian titik kompleks (*complex dot product*)

- Jika **u** = (u_1, u_2, …, u_n) dan **v** = (v_1, v_2, …, v_n) adalah vektor-vektor di C^n, maka perkalian titik dua buah vektor didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + \ldots + u_n\bar{v}_n$$

- Vektor **u** dan **v** orthogonal jika **u** · **v** = 0

- Norma Euclidean vektor **v** adalah

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2 + \ldots + |v_n|^2}$$

- Vektor satuan adalah jika $\|\mathbf{v}\| = 1$

- **Contoh 6**: Misalkan **u** = (1 + *i*, *i*, 3 – *i*), **v** = (1 + *i*, 2, 4*i*), maka

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (1+i)\left(\overline{1+i}\right) + i\left(\overline{2}\right) + (3-i)\left(\overline{4i}\right) = (1+i)(1-i) + 2i + (3-i)(-4i) = -2-10i$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = (1+i)\left(\overline{1+i}\right) + 2\left(\overline{i}\right) + (4i)\left(\overline{3-i}\right) = (1+i)(1-i) - 2i + 4i(3+i) = -2+10i$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{|1+i|^2 + |i|^2 + |3-i|^2} = \sqrt{2+1+10} = \sqrt{13}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{|1+i|^2 + |2|^2 + |4i|^2} = \sqrt{2+4+16} = \sqrt{22}$$

THEOREM 5.3.3

If **u**, **v**, and **w** are vectors in C^n, and if k is a scalar, then the complex Euclidean inner product has the following properties:

(a) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}$ **[Antisymmetry property]**

(b) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$ **[Distributive property]**

(c) $k(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = (k\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}$ **[Homogeneity property]**

(d) $\mathbf{u}\cdot k\mathbf{v} = \overline{k}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$ **[Antihomogeneity property]**

(e) $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \geq 0$ *and* $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 0$ *if and only if* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. **[Positivity property]**

Nilai eigen dan vektor eigen kompleks

THEOREM 5.3.4

If λ is an eigenvalue of a real $n \times n$ matrix A, and if $\mathbf{x}$ is a corresponding eigenvector, then $\overline{\lambda}$ is also an eigenvalue of A, and $\overline{\mathbf{x}}$ is a corresponding eigenvector.

Contoh 7: Tentukan nilai eigen dan basis ruang eigen dari matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Jawaban: Persamaan karakteristiknya adalah

$$\begin{vmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$$

Nilai-nilai eigennya adalah $\lambda = i$ dan $\lambda = -i$

Menghitung vektor eigen:

$$\begin{bmatrix} \lambda+2 & 1 \\ -5 & \lambda-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda = i$,

$$\begin{bmatrix} i+2 & 1 \\ -5 & i-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bentuk augmented: $\begin{bmatrix} i+2 & 1 & 0 \\ -5 & i-2 & 0 \end{bmatrix}$

Lakukan eliminasi Gauss-Jordan pada matriks augmented:

$$\begin{bmatrix} i+2 & 1 & 0 \\ -5 & i-2 & 0 \end{bmatrix} \text{ R1} \leftrightarrow \text{R2 } \begin{bmatrix} -5 & i-2 & 0 \\ i+2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ R1/(-5) } \begin{bmatrix} 1 & 2/5 - i/5 & 0 \\ i+2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ R2 – (i + 2)R1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5}-\frac{1}{5}i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ Solusi: $x_1 + (2/5 – i/5)x_2 = 0$

Misalkan $x_2 = t$, maka $x_1 = \left(-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i\right)t$

Basis ruang eigen:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\mathbf{i} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Periksa kembali bahwa $A\mathbf{x} = i\mathbf{x}$ sebagai berikut:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\left(-\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i\right) - 1 \\ 5\left(-\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i\right) + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \\ i \end{bmatrix} = i\mathbf{x}$$

Dengan cara yang sama untuk $\lambda = -i$ (namun tidak perlu dihitung, sesuai Teorema 5.3.4) diperoleh basis ruang eigennya adalah

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \\ 1 \end{bmatrix}$$

yang merupakan bentuk sekawan dari basis ruang eigen sebelumnya

Periksa kembali bahwa $A\mathbf{x} = -i\bar{\mathbf{x}}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} A\bar{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2\left(-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i\right) - 1 \\ 5\left(-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i\right) + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \\ -i \end{bmatrix} = -i\bar{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

THEOREM 5.3.5

If A is a 2×2 matrix with real entries, then the characteristic equation of A is $\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$ and

(a) A has two distinct real eigenvalues if $\mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A) > 0$;

(b) A has one repeated real eigenvalue if $\mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A) = 0$;

(c) A has two complex conjugate eigenvalues if $\mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A) < 0$.

Contoh 8 In each part, use Formula 13 for the characteristic equation to find the eigenvalues of

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

Solution

(a) We have $\text{tr}(A) = 7$ and $\det(A) = 12$, so the characteristic equation of A is

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$$

Factoring yields $(\lambda - 4)(\lambda - 3) = 0$, so the eigenvalues of A are $\lambda = 4$ and $\lambda = 3$.

(b) We have $\text{tr}(A) = 2$ and $\det(A) = 1$, so the characteristic equation of A is

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

Factoring this equation yields $(\lambda - 1)^2 = 0$, so $\lambda = 1$ is the only eigenvalue of A; it has algebraic multiplicity 2.

(c) We have $\text{tr}(A) = 4$ and $\det(A) = 13$, so the characteristic equation of A is

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

Solving this equation by the quadratic formula yields

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(13)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = 2 \pm 3i$$

Thus, the eigenvalues of A are $\lambda = 2 + 3i$ and $\lambda = 2 - 3i$.

Latihan 2

1. Selesaikan $i\mathbf{x} - 3\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}$ jika $\mathbf{u} = (3 - 4i, 2 + i, -6i)$ dan $\mathbf{v} = (1 + i, 2 - i, 4)$

2. Hitunglah $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ dan $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ jika diketahui $\mathbf{u} = (2 - 3i, i, 4 - 6i)$ dan $\mathbf{v} = (1 + i, 2 - i, 0)$, dan $\mathbf{w} = (-5i, 2 + i, 4)$

3. Hitunglah nilai eigen dan basis ruang eigen untuk matriks2 berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$