Seri bahan kuliah Algeo 20

Singular Value Decomposition (SVD)

(Bagian 1)

Update 2022

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika

STEI-ITB

Dekomposisi Matriks

- Mendekomposisi matriks artinya memfaktorkan sebuah matriks, misalnya A, menjadi hasil kali dari sejumlah matriks lain, P_1, P_2, ..., P_k

$$A = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_k$$

- Terdapat beberapa metode mendekomposisi matriks:

  1. Metode dekomposisi LU
  2. Metode dekomposisi QR
  3. Metode dekomposisi nilai singular (*singular value decomposition* – SVD)

     $\rightarrow$ yang dibahas di dalam kuliah ini

LU decomposition

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

A L U

L = matriks segitiga bawah (*lower triangular matrix*),
U = matriks segitiga atas (*upper triangular matrix*)

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 11/13 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 13/2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 32/13 \end{bmatrix}$$

QR decomposition

$$\underset{\mathbf{A}}{\begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}} = \underset{\mathbf{Q}}{\underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}}_{\text{Orthogonal Unit vectors}}} \underset{\mathbf{R}}{\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{e}_1^T \cdot \mathbf{a}_2 & \mathbf{e}_1^T \cdot \mathbf{a}_3 \\ 0 & \mathbf{e}_2^T \cdot \mathbf{a}_2 & \mathbf{e}_2^T \cdot \mathbf{a}_3 \\ 0 & 0 & \mathbf{e}_3^T \cdot \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}}_{\text{Upper Diagonal Matrix}}}$$

Contoh:

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 2.5 & 1.1 & 0.3 \\ 2.2 & 1.9 & 0.4 \\ 1.8 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}} = \underset{Q}{\begin{pmatrix} -0.7 & 0.1 & -0.7 \\ -0.6 & -0.7 & 0.4 \\ -0.5 & 0.7 & 0.5 \end{pmatrix}} \underset{R}{\begin{pmatrix} -3.8 & -1.9 & -0.6 \\ 0. & -1.1 & 0. \\ 0. & 0. & 0.1 \end{pmatrix}}$$

Singular Value Decomposition (SVD)

- Di dalam materi nilai eigen dan vektor eigen, pokok bahasan diagonalisasi, kita sudah mempelajari bahwa matriks bujursangkar A berukuran n x n dapat difaktorkan menjadi:

$$A = PDP^{-1}$$

dalam hal ini,

P adalah matriks yang kolom-kolomnya adalah basis ruang eigen dari matriks A,

$$P = (p_1 \mid p_2 \mid \ldots \mid p_n)$$

D adalah matriks diagonal sedemikian sehingga

$$D = P^{-1}AP$$

- Bagaimana cara memfaktorkan matriks non-bujursangkar berukuran m x n yang tidak memiliki nilai eigen?

- Untuk matriks non-bujursangkar, pemfaktorannya menggunakan metode *singular decomposition value* (SVD)

- SVD memfaktorkan matriks *A* berukuran *m* x *n* menjadi matriks *U*, Σ, dan *V* sedemikian sehingga

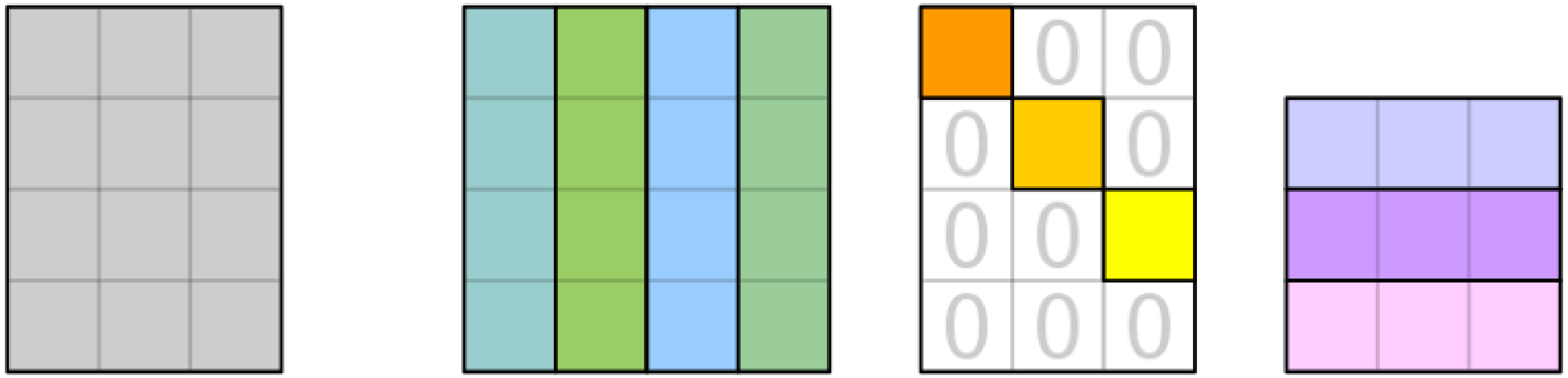
$$A = U\Sigma V^T \tag{1}$$

U = matriks ortogonal *m* x *m*,

V = matriks orthogonal *n* x *n*

Σ = matriks berukuran *m* x *n* yang elemen-elemen diagonal utamanya adalah nilai-nilai singular dari matriks A dan elemen-elemen lainnya 0

Matriks ortogonal adalah matriks yang kolom-kolomnya adalah vektor yang saling orthogonal satu sama lain (hasil kali titik sama dengan 0).

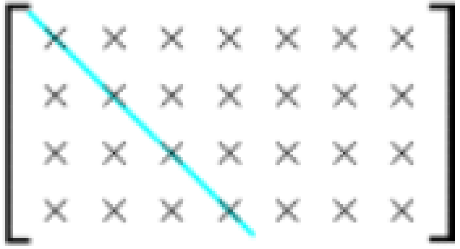


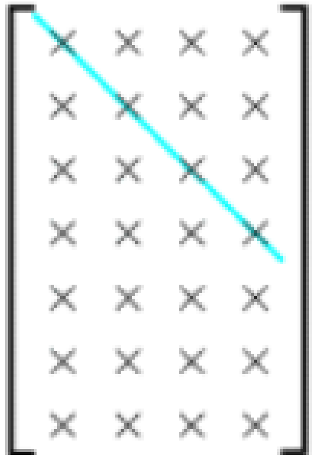
$$\underset{m\times n}{\mathbf{M}} = \underset{m\times m}{\mathbf{U}}\;\underset{m\times n}{\mathbf{\Sigma}}\;\underset{n\times n}{\mathbf{V}^*}$$

Diagonal utama matriks m xn

- Diagonal utama sebuah matriks biasanya didefinisikan pada matriks persegi (matriks bujursangkar) berukuran n x n.

- Untuk matriks bukan bujursangkar, yaitu matriks m x n, diagonal utama matriks didefinisikan pada garis yang dimulai dari sudut kiri atas terus ke bawah matriks sejauh mungkin.





Matriks ortogonal

- **Matriks ortogonal** adalah matriks yang kolom-kolomnya adalah vektor yang saling orthogonal satu sama lain (hasil kali titik sama dengan 0).
- Jika vektor-vektor kolom tersebut merupakan vektor satuan, maka matriks ortogonal tersebut dinamakan juga **matriks ortonormal**.
- Vektor satuan adalah vektor yang dinormalisasi dengan panjang atau *magnitude*-nya sehingga memiliki panjang atau *magnitude* = 1.

- Jika Q adalah matriks ortogonal m x n, dan kolom-kolom matriks Q adalah vektor-vektor satuan $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_m}$, maka $\mathbf{v_i} \cdot \mathbf{v_j} = 0$ untuk $i \neq j$.
- Atau, dapat juga dikatakan bahwa Q adalah matriks ortogonal jika $Q^TQ = I$, dalam hal ini I adalah matriks identitas.

$$\textit{column vectors } v_1, v_2, \ldots, v_n \textit{ of } Q \textit{ are orthogonal :}$$

$$v_i^T v_j = \begin{cases} 0 & \textit{if } i \neq j \\ 1 & \textit{if } i = j \end{cases}$$

$$\textit{The orthogonal matrix } Q = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$$

$$Q^T \cdot Q = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \ldots \\ v_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^T v_1 & v_1^T v_2 & \ldots & v_1^T v_n \\ v_2^T v_1 & v_2^T v_2 & \ldots & v_2^T v_n \\ \ldots & & & \\ v_n^T v_1 & v_n^T v_2 & \ldots & v_n^T v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\therefore Q^{-1} = Q^T$$

Contoh:

$$Q^TQ = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^TQ = \begin{bmatrix} 3/7 & 2/7 & 6/7 \\ -6/7 & 3/7 & 2/7 \\ 2/7 & 6/7 & -3/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/7 & 2/7 & 6/7 \\ -6/7 & 3/7 & 2/7 \\ 2/7 & 6/7 & -3/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nilai-nilai singular matriks

- Misalkan A adalah matriks m x n. Jika $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen dari A^TA, maka

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sigma_n = \sqrt{\lambda_n}$$

  disebut **nilai-nilai singular** dari matriks A.

- Diasumsikan $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0$ sehingga $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$

Teorema

If A is an $m \times n$ matrix, then:

(a) A^TA is orthogonally diagonalizable.

(b) The eigenvalues of A^TA are nonnegative.

Contoh 1: Tentukan nilai-nilai singular matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det(\lambda I - (A^T A)\mathbf{x}) = 0$ $\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 2) - 1 = 0$

Persamaan karakteristik: $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \rightarrow (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$

Nilai-nilai eigen dari $A^T A$ adalah $\lambda_1 = 3$ dan $\lambda_2 = 1$

Jadi, nilai-nilai singular matriks A (dalam urutan dari besar ke kecil) adalah:

$\sigma_1 = \sqrt{3}$ dan $\sigma_2 = \sqrt{1}$

Dekomposisi SVD

$A = U\Sigma V^T$

Vektor-vektor singular kiri

Nilai-nilai singular

Vektor-vektor singular kanan

- Jika A adalah matriks m x n dengan rank k, maka A dapat difaktorkan menjadi

$$A = U\Sigma V^T = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_k | \mathbf{u}_{k+1} \quad \cdots \quad \mathbf{u}_m] \left[\begin{array}{cccc|c} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0_{k\times(n-k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_k & 0_{(m-k)\times(n-k)} \\ & 0_{(m-k)\times k} & & & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_k^T \\ \hline \mathbf{v}_{k+1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{array}\right] \qquad (2)$$

- U adalah matriks m x m, $\sum$ adalah matriks m x n, dan V adalah matriks n x n
- $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ disebut **vektor-vektor singular kiri** dari matriks A
- $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ disebut **vektor-vektor singular kanan** dari matriks A
- $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sigma_k = \sqrt{\lambda_k}$ adalah nilai-nilai singular dari A, dan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ adalah nilai-nilai eigen dari A^TA

$$A = U\Sigma V^T = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_k | \mathbf{u}_{k+1} \quad \cdots \quad \mathbf{u}_m] \left[\begin{array}{ccccc|c} \sigma_1 & 0 & & \cdots & 0 & \\ 0 & \sigma_2 & & \cdots & 0 & 0_{k\times(n-k)} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & & \cdots & \sigma_k & 0_{(m-k)\times(n-k)} \\ & 0_{(m-k)\times k} & & & & \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_k^T \\ \hline \mathbf{v}_{k+1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix}$$

- V = [$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, …, $\mathbf{v_n}$] secara ortogonal mendiagonalisasi A^TA
- Vektor-vektor kolom di dalam *V* diurut sedemikian sehingga $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_k > 0$
- $\mathbf{u}_i = \dfrac{A\mathbf{v}_i}{\|A\mathbf{v}_i\|} = \dfrac{1}{\sigma_i} A\mathbf{v}_i$, i = 1, 2, …, k
- {$\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, …, $\mathbf{u_k}$} adalah basis ortonormal untuk col(A)
- {$\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, …, $\mathbf{u_k}$, $\mathbf{u_{k+1}}$, …, $\mathbf{u_m}$ } adalah perluasan dari {$\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, …, $\mathbf{u_k}$} untuk membentuk basis ortonormal ruang vektor R^m.

THEOREM 9.5.4 Singular Value Decomposition (Expanded Form)

If A is an $m \times n$ matrix of rank k, then A can be factored as

$$A = U\Sigma V^T = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_k | \mathbf{u}_{k+1} \quad \cdots \quad \mathbf{u}_m] \left[\begin{array}{ccccc|c} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & & \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & & 0_{k\times(n-k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_k & & 0_{(m-k)\times(n-k)} \\ & 0_{(m-k)\times k} & & & & \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_k^T \\ \hline \mathbf{v}_{k+1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix}$$

in which $U, \Sigma,$ and V have sizes $m \times m,$ $m \times n,$ and $n \times n,$ respectively, and in which

(a) $V = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n]$ orthogonally diagonalizes $A^T A$.

(b) The nonzero diagonal entries of Σ are $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sigma_k = \sqrt{\lambda_k},$ where $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ are the nonzero eigenvalues of $A^T A$ corresponding to the column vectors of V.

(c) The column vectors of V are ordered so that $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_k > 0$.

(d) $\mathbf{u}_i = \dfrac{A\mathbf{v}_i}{\|A\mathbf{v}_i\|} = \dfrac{1}{\sigma_i} A\mathbf{v}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$

(e) $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ *is an orthonormal basis for* col(A)}.

(f) $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ *is an extension of* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ to an ortho-normal basis for R^m.

The vectors $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ are called the ***left singular vectors*** of A, and the vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ are called the ***right singular vectors*** of A.

Ada dua cara untuk menghitung SVD:

1. Menggunakan Teorema 9.5.4 di atas
2. Menggunakan perhitungan vektor singular kiri dan singular kanan secara terpisah

Cara 1:

1. Tentukan vektor-vektor singular kanan $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, …, $\mathbf{v_n}$ yang berkoresponden dengan nilai-nilai eigen dari A^TA. Normalisasi $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, …, $\mathbf{v_n}$ dengan cara setiap komponen vektornya dibagi dengan panjang vektor. Diperoleh matriks V. Transpose-kan matriks V sehingga menjadi V^T. Rank(A) = k = banyaknya nilai-nilai eigen tidak nol dari A^TA .
2. Tentukan vektor-vektor singular kiri $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, …, $\mathbf{u_k}$ dengan persamaan

   $$\mathbf{u}_i = \frac{A\mathbf{v}_i}{\|A\mathbf{v}_i\|} = \frac{1}{\sigma_i} A\mathbf{v}_i \quad , i = 1, 2, \ldots, k \qquad (3)$$

   Normalisasi $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, …, $\mathbf{u_k}$ dengan cara setiap komponen vektornya dibagi dengan panjang vektor
3. Jika n > k, maka perluas perluaslah {$\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, …, $\mathbf{u_k}$} untuk membentuk

   basis ortonormal untuk R^m
4. Bentuklah matriks $\sum$ berukuran m x n dengan elemen-elemen diagonalnya adalah nilai-nilai singular tidak nol dari matriks A dengan susunan dari besar ke kecil. Nilai singular di dalam $\sum$ adalah akar pangkat dua dari nilai-nilai eigen yang tidak nol dari A^TA.
5. Maka, $A = U\sum V^T$

Contoh 2: Faktorkan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ dengan metode SVD.

<u>Penyelesaian</u>:

(1) Hitung vektor-vektor singular kanan $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$ sebagai berikut:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Nilai-nilai eigen dari A^TA adalah $\lambda_1 = 12$, $\lambda_2 = 10$ dan $\lambda_3 = 0$ (terurut dari besar ke kecil).
Rank(A) = 2, yaitu banyaknya nilai-nilai eigen tidak nol dari A^TA .
Nilai-nilai singular dari nilai eigen yang tidak nol adalah $\sigma_1 = \sqrt{12}$, $\sigma_2 = \sqrt{10}$
Periksalah bahwa vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan setiap nilai eigen tersebut adalah:

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Normalisasi $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, dan $\mathbf{v_3}$:

$$\hat{\mathbf{v}}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{v}}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{(2,-1,0)}{\sqrt{5}} = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{-\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{v}}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \frac{(1,2,-5)}{\sqrt{30}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{30}}{30} \\ \frac{\sqrt{30}}{15} \\ \frac{-\sqrt{30}}{6} \end{bmatrix}$$

Matriks *V* adalah:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{30}}{30} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{30}}{15} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & \frac{-\sqrt{30}}{6} \end{bmatrix} \text{ sehingga } V^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{\sqrt{30}}{30} & \frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{-\sqrt{30}}{6} \end{bmatrix}$$

(2) Menentukan vektor-vektor singular kiri $\mathbf{u_1}$ dan $\mathbf{u_2}$:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{A\mathbf{v}_1}{\|A\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sigma_1} A\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{A\mathbf{v}_2}{\|A\mathbf{v}_2\|} = \frac{1}{\sigma_2} A\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{10}}{2} \\ -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}$$

Normalisasi $\mathbf{u_1}$ dan $\mathbf{u_2}$ dengan cara setiap komponen vektornya dibagi dengan panjang vektor:

Normalisasi $\mathbf{u_1}$ dan $\mathbf{u_2}$: $\hat{\mathbf{u}}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{(\sqrt{3},\sqrt{3})}{\sqrt{6}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ dan $\hat{\mathbf{u}}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{\left(\frac{\sqrt{10}}{2},-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)}{\sqrt{5}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

Diperoleh matriks U:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

(3) Matriks $\sum$ yang berukuran 2 x 3 adalah $\sum = \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}$

(6) Jadi,

$$A = U\Sigma V^T$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{A \\ 2 \times 3}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}}_{\substack{U \\ 2 \times 2}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\Sigma \\ 2 \times 3}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{\sqrt{30}}{30} & \frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{-\sqrt{30}}{6} \end{bmatrix}}_{\substack{V^T \\ 3 \times 3}}$$

Verifikasilah dengan mengalikan ketiga matriks U, $\sum$, dan V^T tersebut menghasilkan matriks A , lihat pada halaman berikut:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{\sqrt{30}}{30} & \frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{-\sqrt{30}}{6} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{24}}{2} & \frac{\sqrt{20}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{24}}{2} & -\frac{\sqrt{20}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{\sqrt{30}}{30} & \frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{-\sqrt{30}}{6} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{144}}{12} + \frac{2\sqrt{100}}{10} + 0 & \frac{\sqrt{144}}{6} - \frac{\sqrt{100}}{10} + 0 & \frac{\sqrt{144}}{12} + 0 + 0 \\ \frac{\sqrt{144}}{12} - \frac{2\sqrt{100}}{10} + 0 & \frac{\sqrt{144}}{6} + \frac{\sqrt{100}}{10} + 0 & \frac{\sqrt{144}}{12} + 0 + 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{12}{12} + \frac{20}{10} + 0 & \frac{12}{6} - \frac{10}{10} + 0 & \frac{12}{12} + 0 + 0 \\ \frac{12}{12} - \frac{20}{10} + 0 & \frac{12}{6} + \frac{10}{10} + 0 & \frac{12}{12} + 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Terbukti!

Contoh 3: Faktorkan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ dengan metode SVD.

Solution We showed in Example 1 that the eigenvalues of $A^T A$ are $\lambda_1 = 3$ and $\lambda_2 = 1$ and that the corresponding singular values of A are $\sigma_1 = \sqrt{3}$ and $\sigma_2 = 1$. We leave it for you to verify that

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

are eigenvectors corresponding to λ_1 and λ_2, respectively, and that $V = [\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2]$ orthogonally diagonalizes $A^T A$. From part (*d*) of Theorem 9.5.4, the vectors

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A\mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A\mathbf{v}_2 = (1) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

are two of the three column vectors of U. Note that $\mathbf{u}_1$ and $\mathbf{u}_2$ are orthonormal, as expected. We could extend the set $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ to an orthonormal basis for R^3. However, the computations will be easier if we first remove the messy radicals by multiplying $\mathbf{u}_1$ and $\mathbf{u}_2$ by appropriate scalars. Thus, we will look for a unit vector $\mathbf{u}_3$ that is orthogonal to

$$\sqrt{6}\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \sqrt{2}\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

To satisfy these two orthogonality conditions, the vector $\mathbf{u}_3$ must be a solution of the homogeneous linear system

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

We leave it for you to show that a general solution of this system is

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normalizing the vector on the right yields

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Thus, the singular value decomposition of A is

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$A \quad = \quad U \quad \Sigma \quad V^T$$

Soal latihan

1. Tentukan nilai-nilai singular dari matriks-matriks A berikut:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -2\end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix}6 & 4\\ 0 & 0\\ 4 & 0\end{bmatrix}$$

2. Dekomposisilah matriks-matriks A pada soal 1 di atas dengan menggunakan metode SVD

Sumber:

1. Howard Anton & Chris Rores, *Elementary Linear Algebra, 10th Edition*

Bersambung ke Bagian 2