Seri bahan kuliah Algeo #19

Nilai Eigen dan Vektor Eigen

(Bagian 2)

Versi update 2022

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika

STEI-ITB

Sumber:

Howard Anton & Chris Rores, *Elementary Linear Algebra, 10th Edition*

Nilai Eigen dan Matriks Balikan

- **Teorema**: Sebuah matriks persegi A berukuran n x n memiliki balikan (*invers*) jika dan hanya jika $\lambda = 0$ <u>bukan</u> nilai eigen dari matriks A.

- Jika A memiliki balikan, maka det(A) $\neq$ 0.

Contoh 5. Dari contoh 2,matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ memiliki nilai eigen $\lambda = 3$ dan $\lambda = -1$.

Tidak ada nilai eigen yang nol, sehingga A memiliki balikan.

Dapat diperiksa bahwa det(A) = (3)(-1) – (8)(0) = -3 $\neq$ 0, sehingga A memiliki balikan, yaitu

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 8/3 & -1 \end{bmatrix}$$

Contoh 6. Matriks A = $\begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ memliki nilai eigen λ= 12, λ = 10 dan λ = 0 (silakan diperiksa!). Karena terdapat nilai eigen λ = 0, maka matriks A tidak memiliki balikan. Dapat diperiksa bahwa det(A) = 0.

Pernyataan yang ekivalen

THEOREM 5.1.6 Equivalent Statements

If A is an $n \times n$ matrix, then the following statements are equivalent.

(a) A is invertible.

(b) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ has only the trivial solution.

(c) The reduced row echelon form of A is I_n.

(d) A is expressible as a product of elementary matrices.

(e) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is consistent for every $n \times 1$ matrix b.

(f) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has exactly one solution for every $n \times 1$ matrix b.

(g) $\det(A) \neq 0$.

(h) The column vectors of A are linearly independent.

(i) The row vectors of A are linearly independent.

(j) The column vectors of A span R^n.

(k) The row vectors of A span R^n.

(l) The column vectors of A form a basis for R^n.

(m) The row vectors of A form a basis for R^n.

(n) A has $rank\ n$.

(o) A has nullity 0.

(p) The orthogonal complement of the null space of A is R^n.

(q) The orthogonal complement of the row space of A is $\{\mathbf{0}\}$.

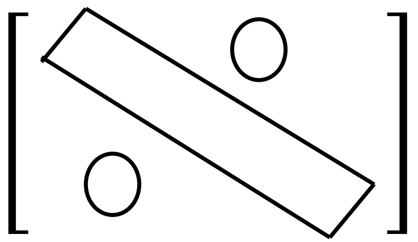
(r) The range of T_A is R^n.

(s) T_A is one-to-one.

(t) $\lambda = 0$ is not an eigenvalue of A.

Diagonalisasi

- Matriks diagonal adalah matriks yang semua elemen di atas dan di bawah diagonal utama adalah nol.



Contoh 1:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Definisi**. Sebuah matriks persegi A dikatakan dapat **didiagonalisasi** jika ia mirip dengan matriks diagonal, yaitu terdapat matriks P sedemikian sehingga $P^{-1}AP$ adalah matriks diagonal. Dalam hal ini dikatakan P mendiagonalisasi matriks A.

- P adalah matriks yang kolom-kolomnya adalah basis ruang eigen dari matriks A, yaitu:

$$P = (p_1 \mid p_2 \mid \dots \mid p_n)$$

Misalkan D adalah matriks diagonal, maka

$$A = PDP^{-1} \quad \rightarrow \quad \boxed{D = P^{-1}AP}$$

- Matriks A memiliki kemiripan dengan D, salah satunya memiliki determinan yang sama, yaitu

$$
\begin{aligned}
D &= P^{-1}AP \\
\det(D) &= \det(P^{-1}AP) \\
&= \det(P^{-1})\det(A)\det(P) \\
&= \frac{1}{\det(P)}\det(A)\det(P) \\
&= \det(A)
\end{aligned}
$$

- Beberapa sifat kemiripan lainnya pada A dan D adalah memiliki *rank*, *nullity*, *trace*, persamaan karakteristik, dan nilai-nilai eigen yang sama.

Table 1 Similarity Invariants

Property	**Description**
Determinant	A and $P^{-1}AP$ have the same determinant.
Invertibility	A is invertible if and only if $P^{-1}AP$ is invertible.
Rank	A and $P^{-1}AP$ have the same rank.
Nullity	A and $P^{-1}AP$ have the same nullity.
Trace	A and $P^{-1}AP$ have the same trace.
Characteristic polynomial	A and $P^{-1}AP$ have the same characteristic polynomial.
Eigenvalues	A and $P^{-1}AP$ have the same eigenvalues.
Eigenspace dimension	If λ is an eigenvalue of A and hence of $P^{-1}AP$, then the eigenspace of A corresponding to λ and the eigenspace of $P^{-1}AP$ corresponding to λ have the same dimension.

Contoh 7: Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Tentukan matriks P yang mendiagonalisasi A.

Jawaban:

Sudah dihitung ruang eigennya dari Latihan 2 (lihat materi Nilai Eigen dan Vektor Eigen bagian 1):

$$E(4) = \{ \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbf{R} \} \text{ dan } E(-2) = \{ \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, t \in \mathbf{R} \}$$

maka

$$P = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}} \end{bmatrix} \rightarrow P^{-1} = \frac{1}{(-1)-1}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Untuk memeriksa apakah P mendiagonalisasi A, maka hitunglah bahwa

$$D = P^{-1}AP$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Contoh 8: Tentukan matriks P yang mendiagonalisasi A = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Jawaban:

Persamaan karakteristik matriks A adalah

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \text{ dan } \lambda_2 = 2$$

Untuk $\lambda = 2 \rightarrow$ E(2) = { $\mathbf{x} = r \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, r dan $s \in \mathbf{R}$ }

Untuk $\lambda = 1 \rightarrow$ E(1) = { $\mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$ }

Maka $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Untuk memastikan bahwa P mendiagonalisasi A, periksa bahwa

$$D = P^{-1}AP$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

adalah matriks diagonal.

Contoh 9: Tentukan matriks P yang mendiagonalisasi A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

<u>Jawaban</u>:

Persamaan karakteristik matriks A adalah

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 2) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \text{ dan } \lambda_2 = 2$$

Untuk $\lambda = 1 \rightarrow E(1) = \{\ \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 1/8 \\ -1/8 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbf{R}\ \}$

Untuk $\lambda = 2 \rightarrow E(2) = \{\ \mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, s \in \mathbf{R}\ \}$

Oleh karena A adalah matriks 3 x 3 sedangkan hanya ada dua vektor basis di dalam kedua ruang eigen, maka tidak terdapat matriks P sehingga A <u>tidak</u> dapat didiagonalisasi.

Kegunaan matriks diagonal: menghitung perpangkatan matriks.

Contoh: Berapakah A^3?

$$
\begin{aligned}
A^3 &= (PDP^{-1})^3 \\
&= (PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \\
&= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)DP^{-1}
\end{aligned}
$$

$P^{-1}P = I$

$$
\begin{aligned}
&= PDIDIDP^{-1} \\
&= PDDDP^{-1} \\
&= PD^3P^{-1}
\end{aligned}
$$

Menghitung D^3 sangat mudah, misalkan dari Contoh 7, matriks diagonal D yang mirip dengan matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ sudah dihitung, yaitu D = $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Maka,

$$D^3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 4^3 & 0 \\ 0 & (-2)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

maka

$$A^3 = PD^3P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 64 & -8 \\ 64 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 28 & 36 \\ 36 & 28 \end{bmatrix}$$

Latihan (dari soal kuis 2019)

Diberikan matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a). Tentukan semua nilai eigen dari matriks A

b). Tentukan semua vektor eigen dari A dan basis dari ruang eigen

c). Apakah A dapat didiagonalsasi? Jika YA, tentukan matriks diagonal dari A, lalu hitunglah A^5 dengan bantuan matriks diagonal tsb.

EXAMPLE 5 Power of a Matrix

Use 3 to find A^{13}, where

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solution We showed in Example 1 that the matrix A is diagonalized by

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

and that

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Thus, it follows from 3 that

$$\begin{aligned} A^{13} = PD^{13}P^{-1} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{13} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -8190 & 0 & -16382 \\ 8191 & 8192 & 8191 \\ 8191 & 0 & 16383 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1. Aplikasi Nilai Eigen dan Vektor Eigen di dalam *Analytic Hierarchy Process* (AHP)

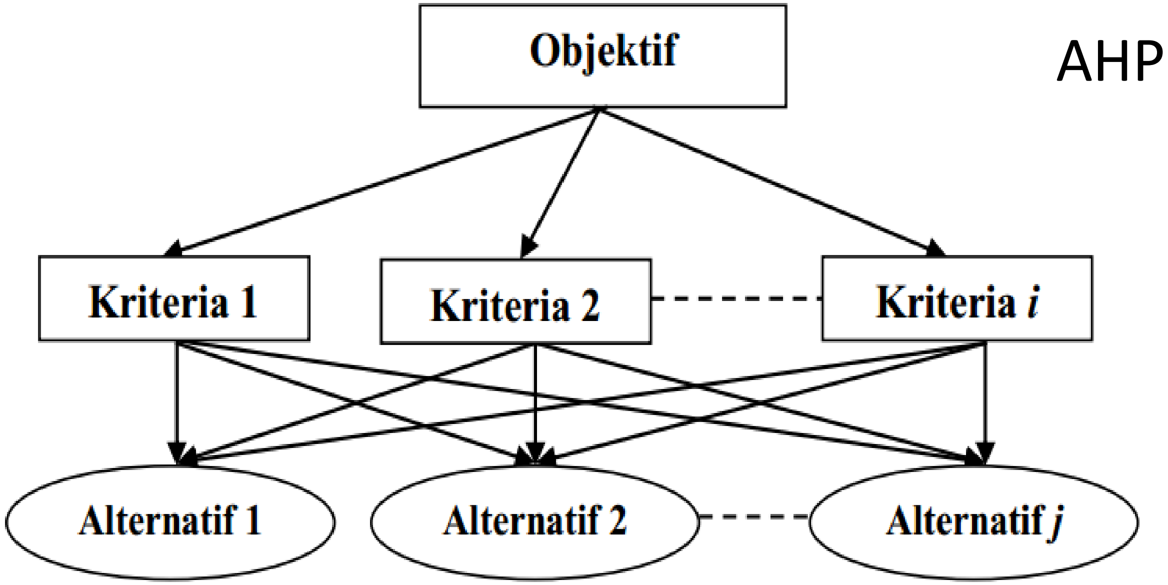
Bahan tambahan IF2123 Aljabar Geometri

Program Studi Informatika ITB

Sumber:

1. Unknown, *Analytic Hierarchy Process (What is AHP)*

- AHP: metode yang digunakan dalam analisis pengambilan keputusan.



AHP: metode untuk menurunkan skala rasio dari perbandingan antar kriteria

Skala rasio diturunkan dari prinsip vektor Eigen

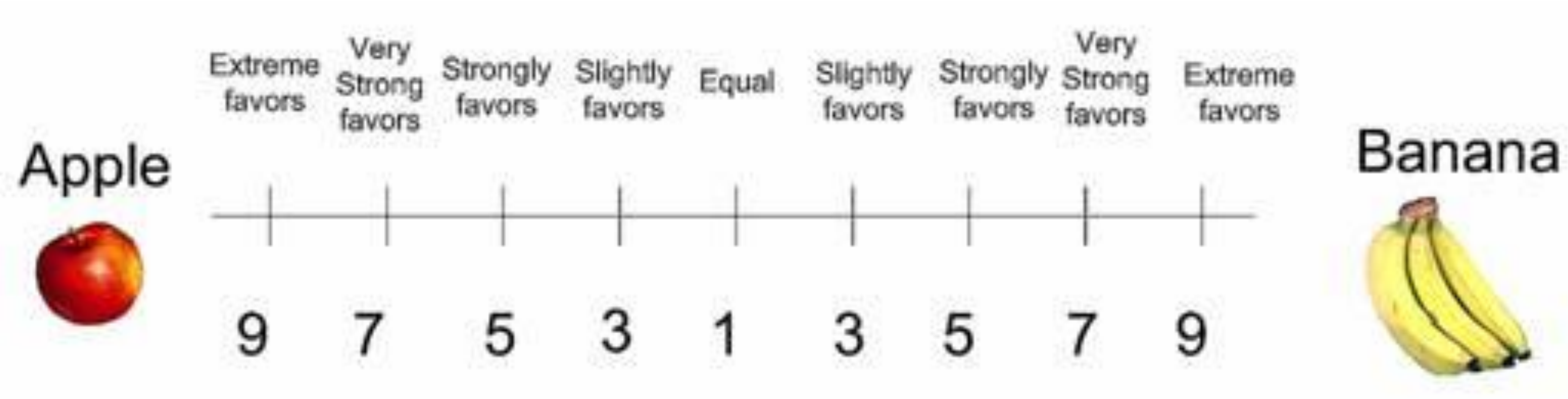
Indeks kekonsistenan diturunkan dari prinsip nilai Eigen

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

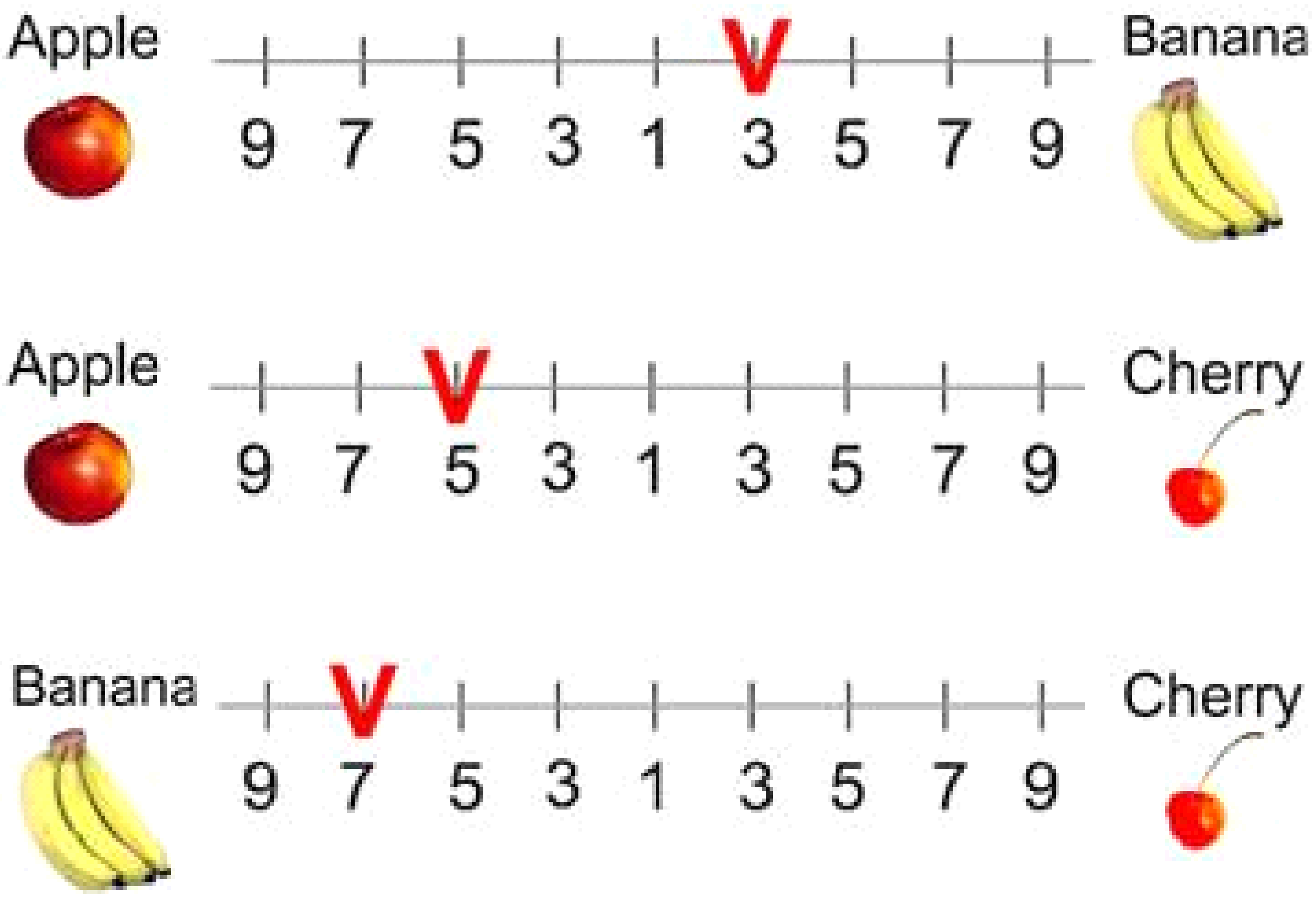
eigenvector

eigenvalue

Contoh: Ada tiga buah yang akan dipilih oleh Joko untuk dibawa piknik: pisang, apel, cherry. Buah mana yang akan dipilih?



Tahap 1: *Pairwise comparison*



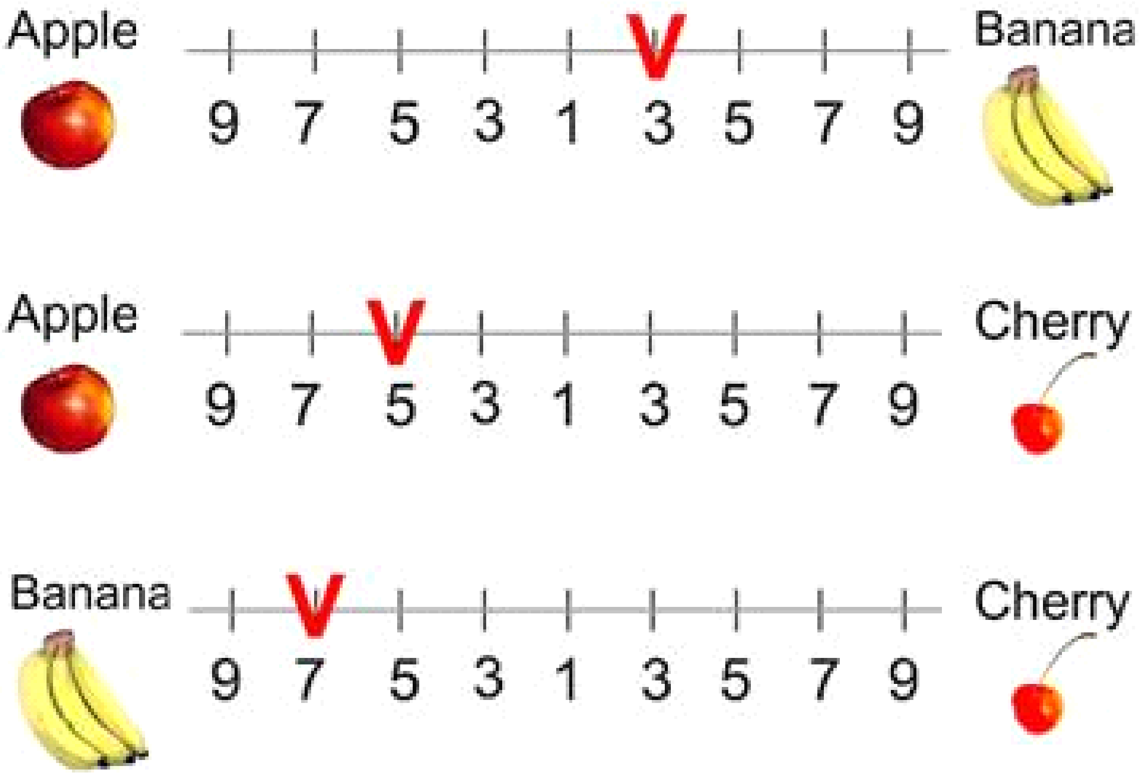
Catatan: Jika ada *n* pilihan, maka diperlukan sebanyak $n(n-1)/2$ perbandingan

Tahap 2: Pembentukan matriks perbandingan

Rule:

- Jika nilai yang diberikan terletak **di kiri** angka 1, maka kita meletakkan **nilai aktual** tersebut di dalam matriks.

- Jika nilai yang diberikan terletak **di kanan** angka 1, maka kita meletakkan **nilai kebalikannya** di dalam matriks.



Rule:
Jika nilai yang diberikan terletak **di kiri** angka 1, maka kita meletakkan **nilai aktual** tersebut di dalam matriks.

Jika nilai yang diberikan terletak **di kanan** angka 1, maka kita meletakkan **nilai kebalikannya** di dalam matriks.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \text{apple} & \text{banana} & \text{cherry} \end{array} \\
A = \begin{array}{r} apple \\ banana \\ cherry \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 5 \\ & 1 & 7 \\ & & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \text{apple} & \text{banana} & \text{cherry} \end{array} \\
A = \begin{array}{r} apple \\ banana \\ cherry \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Tahap 3: Menentukan vektor prioritas (Menghitung nilai eigen dan vektor eigen)

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 1/5 & 1/7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Setelah dilakukan perhitungan, diperoleh:

1. Nilai eigen λ_{max} = 3.0649
2. Vektor eigen $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.87828 \\ 9.02462 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2790 \\ 0.6491 \\ 0.0719 \end{bmatrix}$ *) $\Rightarrow$

Appel = 27,9%
Banana = 64,9%
Cherry = 7,1%

*) Diperoleh dengan menormalisasi vektor eigen, yaitu membagi setiap komponen dengan nilai totalnya

Tahap 4: Menentukan Indeks Konsistensi dan Rasio Konsistensi

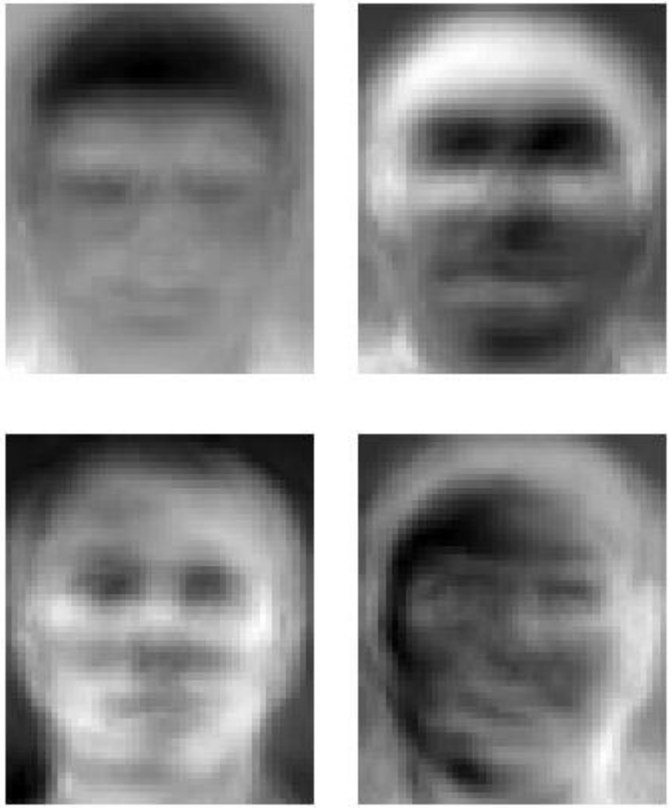
Indeks konsistensi: $$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1} = \frac{3.0967 - 3}{2} = 0.0484$$

Table 1 Random Consistency Index (RI)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
RI	0	0	0.58	0.9	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49

Rasio konsistensi: $$CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0.0484}{0.58} = 0.083 = 8{,}3\%$$ (acceptable)

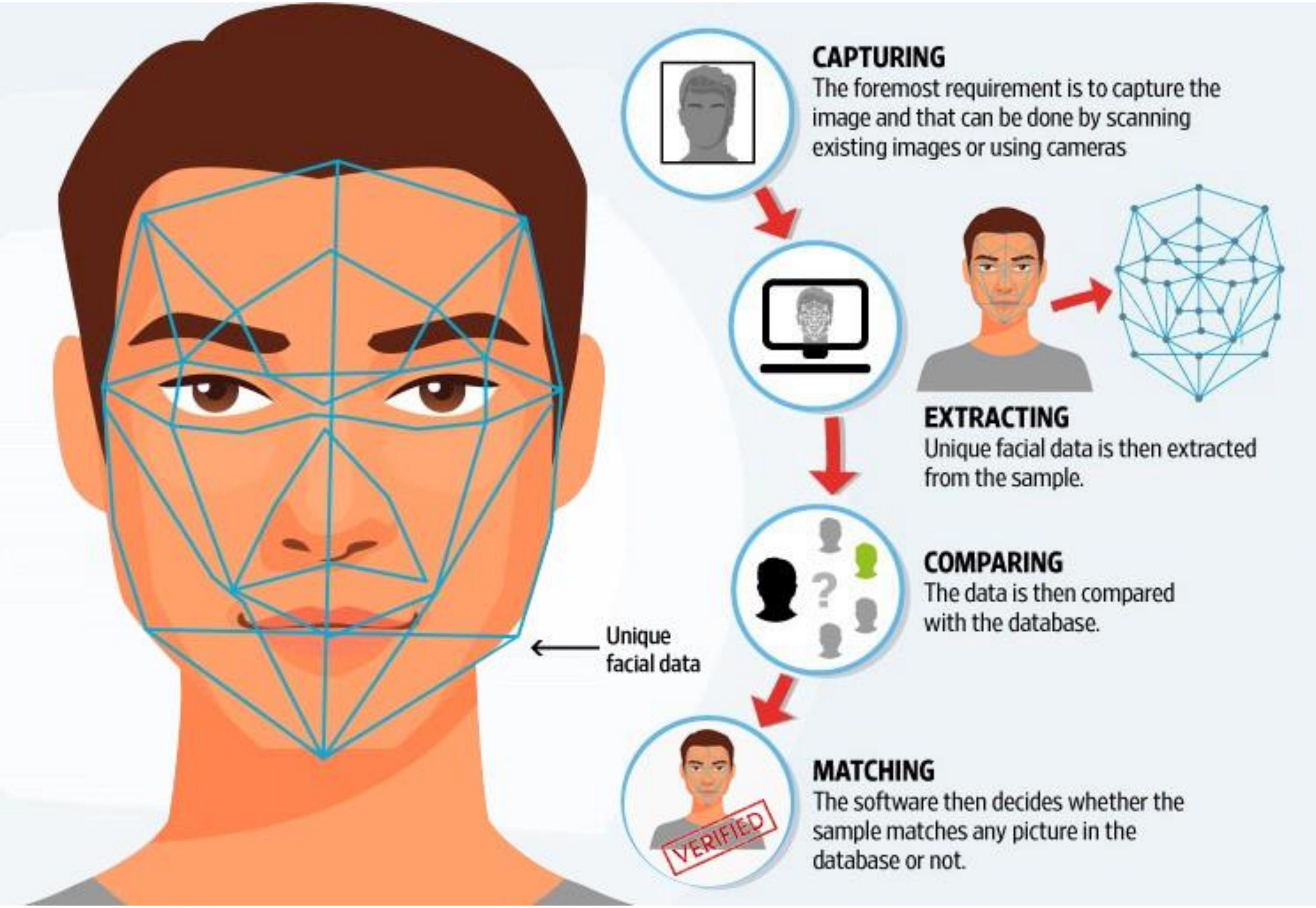
Jika CR $\leq$ 10%, maka inkonsistensi dapat diterima. Jika CR > 10%, maka kita perlu merevisi penilaian subyektif (*pairwise comparison*)



2. Pengenalan Wajah dengan Eigenface

Bahan tambahan IF2123 Aljabar Geometri

Program Studi Informatika ITB



Alur proses di dalam sistem pengenalan wajah
(Sumber: https://www.shadowsystem.com/page/20)

- *Eigenface* adalah metode pengenalan wajah (*face recognition*) di berbasis vektor eigen dan nilai eigen yang digunakan untuk persoalan-persoalan di dalam *computer vision*.

- Dikembangkan oleh Sirovich and Kirby dan digunakan oleh Matthew Turk dan Alex Pentland untuk klasifikasi wajah.

- Vektor eigen diturunkan dari matriks kovarian dari sejumlah citra wajah latih (*training image*).

- *Eigenface* membentuk himpunan basis dari semua gambar yang digunakan untuk membangun matriks kovarian. Ini menghasilkan pengurangan dimensi dengan memungkinkan kumpulan gambar dasar yang lebih kecil untuk mewakili gambar pelatihan asli. Klasifikasi dapat dicapai dengan membandingkan bagaimana wajah direpresentasikan oleh himpunan basis .

(Sumber: https://en.m.wikipedia.org/wiki/Eigenface)

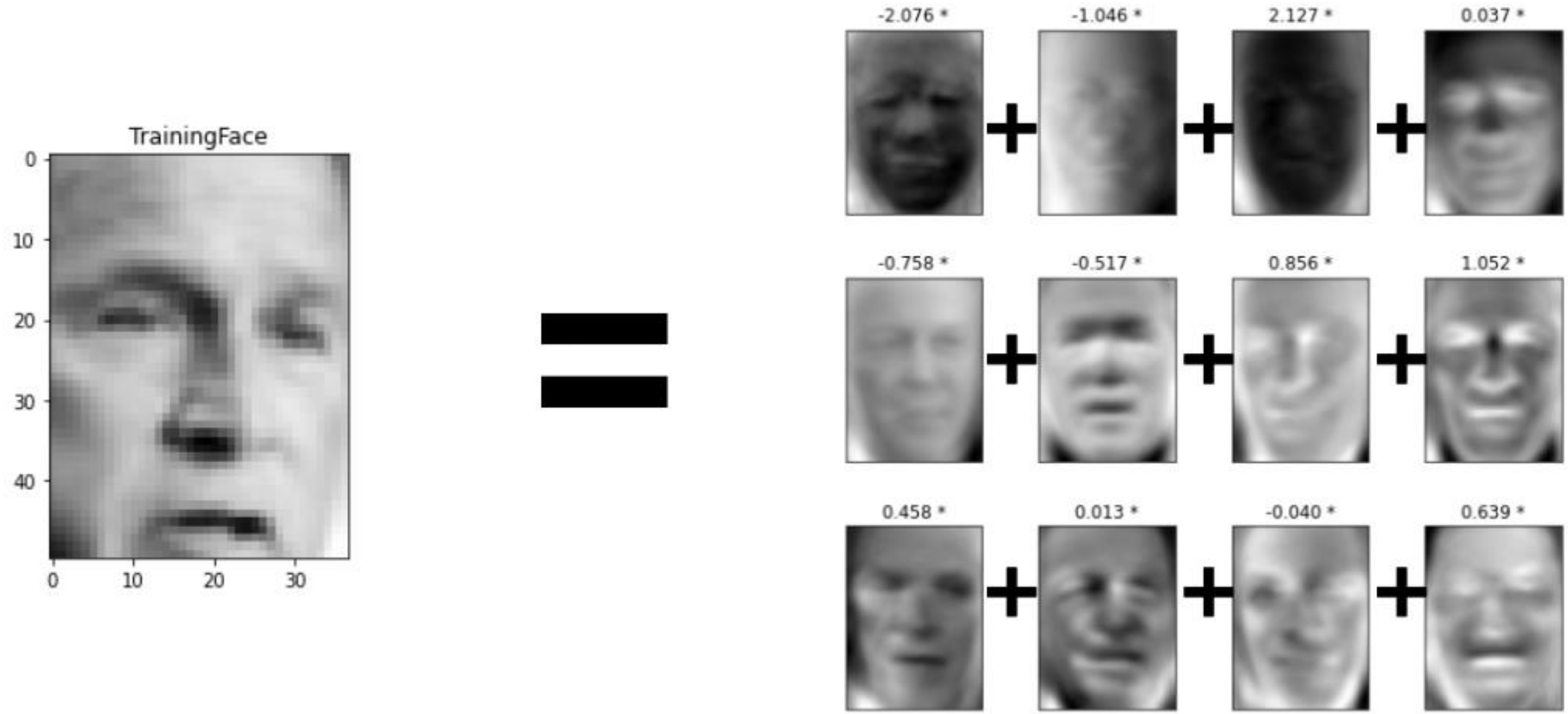
- Gagasannya adalah bahwa setiap wajah manusia dalam kelompok ras adalah kombinasi dari beberapa lusin bentuk primer.

- Misalnya, dengan menganalisis pemindaian tiga dimensi dari banyak wajah, para peneliti di Universitas Rockefeller telah menghasilkan bentuk kepala rata-rata pada ras Kaukasia—dijuluki *meanhead* (gambar pojok kiri atas)—dan satu himpunan berisi variasi wajah dari bentuk itu, yang disebut *eigenheads* (15 di antaranya ditunjukkan pada gambar).

- Dinamakan *eigenface* karena merupakan vektor eigen dari matriks kovarian yang menyimpan informasi citra wajah. Bentuk wajah direpresentasikan secara matematis sebagai kombinasi linier dari *eigenheads*.

meanhead

(Sumber: buku Howard Anton)



Rincian metode Eigenface dapat dibaca dari sini:

1. https://www.geeksforgeeks.org/ml-face-recognition-using-eigenfaces-pca-algorithm/
2. https://www.neliti.com/publications/135138/pengenalan-wajah-menggunakan-algoritma-eigenface-dan-euclidean-distance

TAMAT