Solusi Soal Kuis 3 IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

8 November 2021

Waktu: 50 menit

Sifat: Closed book, boleh pakai kalkulator

1. **(Bobot nilai =10 + 10 + 10)** Diketahui matriks sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

   a. Carilah nilai eigen dari matriks di atas.
   b. Carilah basis ruang eigen dari matriks di atas.
   c. Carilah vektor eigen dari matriks di atas.

Jawaban:

Persamaan karakteristik dari matriks A adalah:

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$$

Atau

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$

Dengan menggunakan pemfaktoran, didapatlah:

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

sehingga, nilai-nilai eigen dari A adalah:

$$\lambda = 1 \qquad \& \qquad \lambda = 2$$

Berdasarkan definisi,

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

adalah suatu vektor eigen dari matriks A yang terkait dengan λ jika dan hanya jika $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Hal ini berarti bahwa $\boldsymbol{x}$ dikatakan sebagai suatu vektor eigen dari matriks A jika dan hanya jika $\boldsymbol{x}$ merupakan suatu solusi nontrivial dari persamaan $(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, yaitu:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & -2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jika $\lambda = 2$, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan operasi baris elementer, didapatlah

$$x_1 + x_3 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = -x_3$$

Karena dari hasil yang didapat, tidak terdapat keterangan mengenai x_2, maka x_2 dapat dianggap sebagai suatu parameter; misalkan $x_2 = t$. Dan, misalkan pula $x_3 = s$, maka:

$$x_1 = -s, \qquad x_2 = t, \qquad x_3 = s$$

sehingga, vektor eigen dari A yang terkait dengan $\lambda = 2$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Karena

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \& \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bebas linier (mengapa?), vektor-vektor ini membentuk suatu basis untuk ruang eigen yang terkait dengan $\lambda = 2$.

Jika $\lambda = 1$, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan operasi baris elementer, didapatlah

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 = 0 \quad &\rightarrow \quad x_1 = -2x_3 \\ x_2 - x_3 = 0 \quad &\rightarrow \quad x_2 = x_3 \end{aligned}$$

Misalkan $x_3 = s$, maka

$$x_1 = -2s, \qquad x_2 = s, \qquad x_3 = s$$

sehingga, vektor eigen dari A yang terkait dengan $\lambda = 1$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Karena

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bebas linier (mengapa?), vektor di atas membentuk suatu basis yang terkait dengan $\lambda = 1$.

Untuk menentukan vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen (λ), harus ditentukan terlebih dahulu basis-basis untuk ruang eigennya.

Perhatikan kembali contoh di atas. Untuk vektor eigen dari A yang terkait dengan $\lambda = 2$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk

$$\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

Misalkan $s = 1$ dan $t = 1$, maka didapatlah vektor eigen yang terkait dengan $\lambda = 2$ adalah:

$$\boldsymbol{x} = 1\cdot\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Sementara, untuk vektor eigen dari A yang terkait dengan $\lambda = 1$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk

$$\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$$

Misalkan $s = -2$, maka didapatlah vektor eigen yang terkait dengan $\lambda = 1$ adalah:

$$\boldsymbol{x} = -2\cdot\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\-2\\-2\end{bmatrix}$$

2. **(Bobot nilai = 10 + 5 + 10)** Diberikan sebuah matriks sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\2 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

   a. Tentukan nilai-nilai singular dari matriks A
   b. Berapakah rank(A)?
   c. Tentukan hanya matriks $\sum$ dan V saja dari faktorisasi A = $U\sum V^T$

Jawaban:

   a. Untuk menentukan nilai-nilai singular, hitung

$$A^TA = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\2 & 1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 4 & -3\\4 & 5 & -3\\-3 & -3 & 2\end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - (A^TA)x) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix}\lambda-5 & -4 & 3\\-4 & \lambda-5 & 3\\3 & 3 & \lambda-2\end{vmatrix} = 0$$

Diperoleh nilai-nila eigen $\lambda_1 = 11$, $\lambda_2 = 1$, dan $\lambda_3 = 0$

Nilai-nilai singular adalah $\sigma_1 = \sqrt{11} = 3.32$, $\sigma_2 = \sqrt{1}$, dan $\sigma_3 = 0$

   b. Rank(A) = banyaknya nilai eigen yang tidak nol dari A^TA = 2

c. Matriks $\sum$ adalah

$$\sum = \begin{bmatrix} 3.32 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks V adalah

$$V = \begin{bmatrix} -0.64 & -0.64 & 0.43 \\ 0.71 & -0.71 & 0 \\ 0.30 & -0.30 & 0.91 \end{bmatrix}$$

Catatan: urutan angka dan tanda di dalam V mungkin bisa berbeda tergantung cara memperoleh vektor eigen. Jawaban dianggap benar.

3. **(Bobot nilai = 5 + 5 + 10)** Diberikan quaternion p = 3 + 2i – 4j + 3k dan q = -3i + 2j – 5k. Tentukan:
   a. $(p + q)^{-1}$
   b. $\overline{2p - 3q}$
   c. qq^{-1}

   Jawaban:
   a. p + q = (3 + 2i – 4j + 3k) + (-3i + 2j – 5k) = 3 – i – 2j - 2k

      $(p + q)^{-1} = (3 + i + 2j + 2k)/(\sqrt{18})^2 = 1/6 + (1/18)i + (1/9)j + (1/9)k$

   b. 2p – 3q = 2(3 + 2i – 4j + 3k) – 3(-3i + 2j – 5k) = 6 + 4i - 8j +6k + 9i - 6j + 15k =

      = 6 + 13i – 14j +21k

      $\overline{2p - 3q}$ = 6 – 13i + 14j – 21k

   c. qq^{-1} = (-3i + 2j – 5k)(3/38 i – 1/19 j + 5/38k) = 1

4. **(Bobot nilai = 10 + 15)** Diberikan sebuah vektor **p =** *(2,3,1)*. Vektor **p** diputar sebesar 120 derajat berlawanan arah dengan jarum jam dengan sumbu putarnya adalah **u =** *(1,1,1)*.

   a. Tentukan quaternion q dan q^{-1} yang merupakan rotor.

   b. Hitunglah vektor bayangan dari **p** (misal **p’**) dengan rotasi diatas.

Jawaban:

a) q = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5), q’ = (0.5, -0.5,-0.5, -0.5)
b) p = (1, 2, 3)