Solusi Kuis 2 IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

4 Oktober 2021

Waktu: 55 menit

Sifat: Open book

Setiap soal nilainya 25

1. Diketahui tiga buah titik P(2, 6, 1), Q(4, 2, 8), dan R(-8, 4, 10).
   a) Dengan menggunakan normal bidang, tentukan persamaan bidang yang melalui titik P, Q, dan R
   b) Jika S(-2, 0, 1) adalah sebuah titik yang tidak terletak pada bidang dari jawaban a di atas, tentukan panjang proyeksi vektor PS pada vektor PQ tersebut dan sudut yang dibentuk vektor PS dengan PQ.

Jawaban:

a) **n** = **PQ** × **PR**

PQ = (4, 2, 8) – (2, 6, 1) = (2, -4, 7)
PR = (-8, 4, 10) – (2, 6, 1) = (-10, -2, 9)

n = **PQ** × **PR** = $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -4 & 7 \\ -10 & -2 & 9 \end{vmatrix}$ = -22**i** – 88**j** – 44**k**

Jadi, **n** = (-22, -88, -44)

Persamaan bidang yang melalui titik P sebagai acuan adalah:

a(x – x0) + b(y – y0) + c(z – z0) = 0
-22(x – 2) – 88(y – 6) – 44(z – 1) = 0
-22x + 44 – 88y + 528 - 44z + 44 = 0
-22x – 88y – 44z + 616 = 0
x + 4y + 2z - 28 = 0

b) **PS** = (-2, 0, 1) – (2, 6, 1) = (-4, -6, 0)
Proyeksi vektor **PS** pada vektor **PQ** misalkan adalah **x**:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{PS} \cdot \mathbf{PQ}}{\|\mathbf{PQ}\|^2}\,\mathbf{PQ} = \frac{(-4)(2) + (-6)(-4) + (0)(7)}{2^2 + (-4)^2 + (7)^2}\,(2, -4, 7)$$

$$= \frac{16}{69}(2, -4, 7) = \left(\frac{32}{69}, -\frac{64}{69}, \frac{112}{69}\right)$$

Panjang $\mathbf{x}$ = $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\frac{32}{69})^2 + (-\frac{64}{69})^2 + (\frac{112}{69})^2} = \frac{16}{69}\sqrt{69}$

Sudut yang dibentuk oleh vektor PS dan vektor PQ adalah:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{PS}\cdot\mathbf{PQ}}{\|\mathbf{PS}\|\,\|\mathbf{PQ}\|} = \frac{(-4)(2)+(-6)(-4)+(0)(7)}{\sqrt{(-4)^2+(-6)^2+0^2}\,\sqrt{2^2+(-4)^2+(7)^2}} = \frac{16}{\sqrt{52}\sqrt{69}} = \frac{16}{\sqrt{3588}} = 0.267$$

$\theta = 74.51°$

2. Diketahui empat buah titik A(0,1,0); B(2,1,2), C(3,2,1); D(3,1,2).

   a) Hitunglah luas segitiga yang dibentuk oleh A,C, dan D

   b) Jika tiga titik A,C,D merupakan alas dari paralelpiped A,B,C,D, hitunglah volumenya.

Jawaban:

Jawaban a)

$\overline{AC} = \{C_x - A_x; C_y - A_y; C_z - A_z\} = \{3 - 0; 2 - 1; 1 - 0\} = \{3; 1; 1\}$

$\overline{AD} = \{D_x - A_x; D_y - A_y; D_z - A_z\} = \{3 - 0; 1 - 1; 2 - 0\} = \{3; 0; 2\}$

$A = \frac{1}{2}|\overline{AC} \times \overline{AD}|$

Calculate cross product of vectors:

$\overline{c} = \overline{AC} \times \overline{AD}$

$$\overline{AC} \times \overline{AD} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ AC_x & AC_y & AC_z \\ AD_x & AD_y & AD_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}(1\cdot2 - 1\cdot0) - \boldsymbol{j}(3\cdot2 - 1\cdot3) + \boldsymbol{k}(3\cdot0 - 1\cdot3) = \boldsymbol{i}(2 - 0) - \boldsymbol{j}(6 - 3) + \boldsymbol{k}(0 - 3) =$$

$= \{2; -3; -3\}$

Calculate magnitude of a vector:

$|\overline{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9 + 9} = \sqrt{22}$

Calculate triangle area:

$A = \frac{1}{2}\sqrt{22} = \frac{\sqrt{22}}{2} \approx 2.345207879911715$

Jawaban b)

Calculate vector by initial and terminal points:

$\overline{AB} = \{B_x - A_x; B_y - A_y; B_z - A_z\} = \{2 - 0; 1 - 1; 2 - 0\} = \{2; 0; 2\}$

$\overline{AC} = \{C_x - A_x; C_y - A_y; C_z - A_z\} = \{3 - 0; 2 - 1; 1 - 0\} = \{3; 1; 1\}$

$\overline{AD} = \{D_x - A_x; D_y - A_y; D_z - A_z\} = \{3 - 0; 1 - 1; 2 - 0\} = \{3; 0; 2\}$

$$\overline{AB} \cdot (\overline{AC} \times \overline{AD}) = \begin{vmatrix} AB_x & AB_y & AB_z \\ AC_x & AC_y & AC_z \\ AD_x & AD_y & AD_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot1\cdot2 + 0\cdot1\cdot3 + 2\cdot3\cdot0 - 2\cdot1\cdot3 - 0\cdot3\cdot2 - 2\cdot1\cdot0 = 4 + 0 + 0 - 6 - 0 - 0 =$$

$= -2$

Volumenya $|-2| = 2$

3. Diketahui sistem persamaan linear sbb :

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0$$
$$3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + x_4 + 5x_5 = 0$$

a) Tentukanlah basisnya
b) Tentukanlah dimensinya.

Jawaban:

Harus dicari solusi SPL dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \longrightarrow x_3 = -2x_4 + 2x_5$

$x_1 + 2x_2 - 5x_4 + 7x_5 = 0 \longrightarrow x_1 = -2x_2 + 5x_4 - 7x_5$

Solusinya : $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Maka yang menjadi basisnya adalah :

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sedangkan dimensinya adalah 3 (karena basisnya ada 3)

4. Misalkan B1 = {u1, u2} dan B2 = {v1, v2} adalah basis-basis untuk ruang vektor R2, yang dalam hal ini u1 = (2, 2), u2 = (4, -1), v1 = (1, 3) dan v2 = (-1, -1)
   a) Tentukan matriks transisi dari B1 ke B2
   b) Tentukan koordinat vektor **w** = (5, -3) relatif pada basis B1 lalu gunakan matriks transisi dari B1 ke B2 untuk menghitung koordinat vektor **w** relatif pada basis B2
   c) Lalu tentukan vektor **w** dengan basis B2 tersebut.

Jawaban:

a) Pada kasus ini, B1 = basis lama, dan B2 = basis baru

[basis baru | basis lama] = $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{OBE}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -5/2 \\ 0 & 1 & -2 & -13/2 \end{array}\right)$

Matriks transisi adalah $P_{B1 \rightarrow B2} = \begin{pmatrix} 0 & -5/2 \\ -2 & -13/2 \end{pmatrix}$

b) **w** = c1u1 + c2u2 $\rightarrow$ (5, -3) = c1(2, 2) + c2(4, -1)

Diperoleh SPL:

2c1 + 4c2 = 5

2c1 – c2 = -3

Solusi: c1 = -7/10; c2 = 8/5

Jadi, koordinat **w** relative pada basis B1 adalah $(\mathbf{w})_{B1}$ = (-7/10, 8/5)

Koordinat vektor **w** relative pada basis B2 adalah:

$$(\mathbf{w})_{B2} = \begin{pmatrix} 0 & -5/2 \\ -2 & -13/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7/10 \\ 8/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \end{pmatrix}$$

(Periksa kebenaran koordinat relative w pada basis B2 sbb:

$(5, -3) = c_1v_1 + c_2v_2 = c_1(1, 3) + c_2(-1, -1)$

Diperoleh SPL:

$c_1 - c_2 = 5$

$3c_1 - c_2 = -3$

Solusi: $c_1 = -4$ dan $c_2 = -9$

Jadi, koordinat **w** relative pada basis B2 adalah $(\mathbf{w})_{B2} = (-4, -9)$

c) Vektor **w** pada basis B2 adalah: $w' = c_1v_1 + c_2 v_2 = -4(1, 3) - 9(-1, -1)$

$= (-4, -12) + (9, 9) = (5, -3)$

Tidak berubah (tetap). Yang beruba adalah koordinatnya.