

Solusi Kuis 3 Aljabar Linier dan Geometri
Senin, 9 November 2020
Waktu: 1 jam

1. Diketahui Matriks A sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- Tentukanlah eigenvalues dari matriks A.
- Tentukan basis untuk tiap-tiap eigenvalues
- Tentukan matriks diagonal yang dihasilkan.

(Nilai: 10 + 10 + 5)

Jawaban:

a.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -3 & -7 \\ 0 & -2 - \lambda & -6 \\ 0 & 2 & 5 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda) \det \begin{pmatrix} -2 - \lambda & -6 \\ 2 & 5 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (1 - \lambda)[(-2 - \lambda)(5 - \lambda) - (-6)2] \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2. \\ &= -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) \end{aligned}$$

Eigenvalues 1 dan 2.

b. Untuk eigenvalues = 1, maka :

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 + \frac{2}{3}R_1}]{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + \frac{2}{3}R_2} \begin{pmatrix} 0 & \boxed{-3} & -7 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Basis nya adalah :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eigenvalues = 2 maka :

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -7 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + \frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} \boxed{-1} & -3 & -7 \\ 0 & \boxed{-4} & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}x_3 \\ -\frac{3}{2}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Basisnya adalah :

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c. Tidak ada matriks diagonalisasi untuk matriks A karena jumlah vector basis hanya ada

2. Tuliskan untuk setiap nomor jawaban **benar** atau **salah**:

Misalkan A adalah matriks persegi n x n, E adalah matriks yang mendiagonalisasi A, D adalah matriks diagonal yang memiliki kemiripan dengan A, maka:

- $D = EAE^{-1}$ (Benar/Salah)
- Matriks A dan E memiliki nilai eigen yang sama. (Benar/Salah)
- Matriks A dan D memiliki trace yang tidak nol. (Benar/Salah)

- d. Jika A tidak memiliki balikan (invers), maka D juga tidak memiliki balikan. (Benar/Salah)
- e. $\text{Rank}(D) + \text{nullity}(D) = n$ (Benar/Salah)
- f. Jika A dapat didiagonalisasi dan dapat dibalikkan (invertible), maka transpose matriks A juga dapat didiagonalisasi. (Benar/salah)

(Nilai: 15, tiap soal = 2,5)

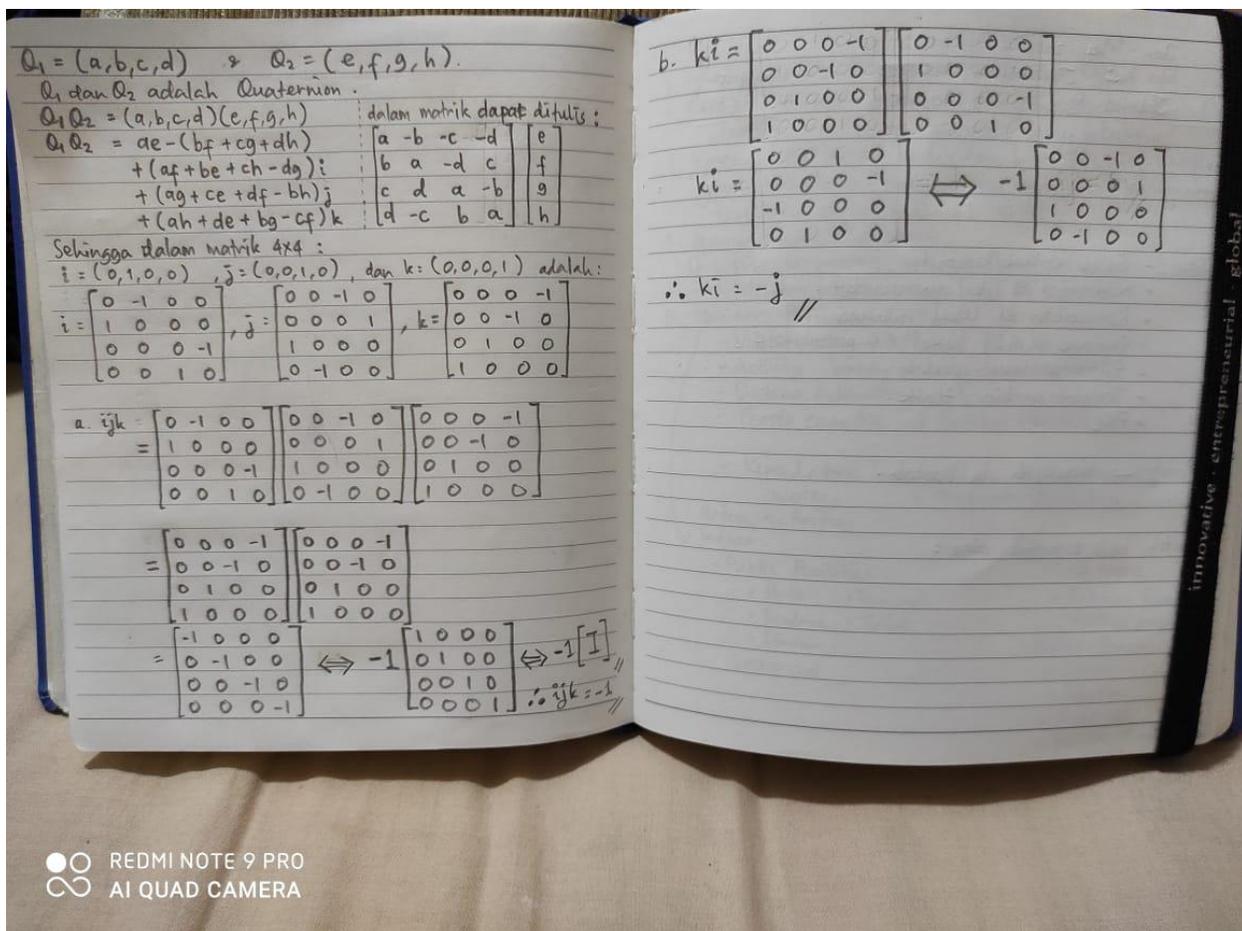
Jawaban:

- a. Salah
- b. Salah
- c. Salah
- d. Benar
- e. Benar
- f. Benar

3. Diketahui Quaternion tersusun atas 4 komponen; 1 komponen riil dan 3 komponen imajiner (i,j,k) yang dapat disusun dalam bentuk tuple (a,b,c,d). Dengan menggunakan perkalian matriks, buktikan bahwa:
- b. $ijk = -1$
- c. $ki = -j$

(Nilai: 10 + 10)

Jawaban:



4. Diberikan sebuah quaternion $q = 2 + 3i - 4j + k$. Tunjukkan bahwa perkalian q dengan sekawannya (*conjugate*) menghasilkan nilai yang sama dengan $2^2 + 3^2 + (-4)^2 + 1^2$. (Nilai: 15)

Jawaban:

$$q = a + bi + cj + dk$$

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk$$

Dapat ditunjukkan bahwa $q \bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

Pada soal: $q = 2 + 3i - 4j + k$, sehingga $\bar{q} = 2 - 3i + 4j - k$

$$\begin{aligned}
 q \bar{q} &= (2 + 3i - 4j + k)(2 - 3i + 4j - k) = 4 - 6i + 8j - 2k + 6i - 9i^2 + 12ij - 3ik - 8j - 12ji - 16j^2 + \\
 &\quad 4jk + 2k - 3ki + 4kj - k^2 \\
 &= 4 + 9 + 16 + 1 = 2^2 + 3^2 + (-4)^2 + 1^2 = 30
 \end{aligned}$$

5. Diketahui Sector $\mathbf{p}=(1,1,1)$, yang diputar terhadap sumbu $\mathbf{u}=(1,1,0)$ sebesar 90° berlawanan jarum jam. Sebutkan bayangannya \mathbf{p}' . Tentukan:
- Vektor \mathbf{q} dan \mathbf{q}^{-1} yang berfungsi sebagai rotor.
 - Tentukan \mathbf{p}'

(Nilai: 10 + 15)

Soal nomor 5

(a) $\mathbf{q} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$; $\mathbf{q}^{-1} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$

(b) $\mathbf{p}' = (\sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ atau $\mathbf{p}' = (1.70, 0.29, 0)$