

# Solusi Kuis 2 Aljabar Linier dan Geometri

Senin, 5 Oktober 2020

Waktu: 1 jam

- Titik A (2,2,5), B (1,-1,-4), C (3,3,10), dan D (8,6,3) adalah simpul-simpul dari limas segitiga, dengan titik A, B, dan C merupakan simpul penyusun alas segitiga dari pyramid tersebut.
  - Hitunglah panjang vektor AB, AC dan besar sudut BAC
  - Tunjukkan bahwa vektor AD tegak lurus terhadap vektor AB dan AC
  - Hitung volume dari limas segitiga ABCD tersebut

Jawaban:

- Titik A (2,2,5), B (1,-1,-4), C (3,3,10), dan D (8,6,3) adalah simpul-simpul dari limas segitiga, dengan titik A, B, dan C merupakan simpul penyusun alas segitiga dari limas tersebut.
  - Hitunglah panjang vektor AB, AC dan besar sudut BAC
  - Tunjukkan bahwa vektor AD tegak lurus terhadap vektor AB dan AC
  - Hitung volume dari limas segitiga ABCD tersebut

Jawaban:

a)  $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$        $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$        $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\| \cos(\angle BAC)$   
 $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + (-9)^2} = \sqrt{91}$        $\|\vec{AC}\| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (5)^2} = \sqrt{27}$        $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \sqrt{91} \cdot \sqrt{27} \cos(\angle BAC)$   
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -1 - 3 - 45 = -49 = \sqrt{91} \cdot \sqrt{27} \cos(\angle BAC)$   
 $\cos(\angle BAC) = \frac{-49}{\sqrt{91} \cdot \sqrt{27}}$        $\angle BAC = \cos^{-1}\left(\frac{-49}{\sqrt{2457}}\right)$  //

b)  $\vec{AD} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$        $\vec{AD} \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$        $\vec{AD} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$        $\therefore \vec{AD}$  tegak lurus dengan  
 $\|\vec{AD}\| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}$        $\vec{AD} \cdot \vec{AB} = (-6) + (-12) + (18)$        $\vec{AD} \cdot \vec{AC} = (6) + (4) + (-10)$   
 $\vec{AD} \cdot \vec{AB} = 0$        $\vec{AD} \cdot \vec{AC} = 0$       hasil perkalian titik = 0 //

c) Vol. limas =  $\frac{1}{3}$  luas alas  $\times$  tinggi  
 Luas alas =  $\frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$       Luas alas =  $\frac{1}{2} \|-6i - 4j + 2k\|$       Luas alas =  $\frac{1}{2} \sqrt{36+16+4} = \frac{1}{2} \sqrt{56}$        $\therefore$  Vol. limas =  $\frac{56}{6}$  //

$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -3 & -9 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left( i(-3 \cdot 5 - (-9) \cdot (-1)) - j(-1 \cdot 5 - (-9) \cdot 1) + k(-1 \cdot 3 - (-3) \cdot 1) \right)$       Vol. limas =  $\frac{1}{3} \cdot$  Luas alas  $\cdot \|\vec{AD}\|$   
 $= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{56} \cdot \sqrt{56}$

- Diberikan tiga buah vector di  $R^3$ :  $\mathbf{u}=(3,1,2)$   $\mathbf{v}=(4,5,1)$   $\mathbf{w}=(1,2,4)$ 
  - Tentukan normal bidang yang dibentuk oleh vector v dan w
  - Tentukan vector proyeksi u terhadap bidang (jawaban a)

Jawaban:

1. Diberikan tiga buah vector di  $\mathbb{R}^3$ :  
 $u=(3,1,2)$   $v=(4,5,1)$   $w=(1,2,4)$ 
  - a). Tentukan normal bidang yang dibentuk oleh vector  $v$  dan  $w$
  - b). Tentukan vector proyeksi  $u$  terhadap bidang (jawaban a)

Jawab :

$$a) \quad \eta = (v \times w) = \left( \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (18, -15, 3)$$

$$b) \quad P_{vw} u = \bar{u} - \frac{(u \cdot \eta)}{\|\eta\|^2} \eta =$$
$$= (3, 1, 2) - \frac{(3 \times 18 - 15 + 6)}{18^2 + (-15)^2 + 3^2} (18, -15, 3)$$
$$= (3, 1, 2) - \frac{45}{558} (18, -15, 3)$$

3. **Google** misalkan menggunakan metode ruang vektor untuk me-ranking website-website berdasarkan keyword yang dimasukkan.

Misalkan ada masukan keyword dari pengguna sbb : "*red big car*" dan ada 3 website yang isinya sebagai berikut :

<https://www.algeo.com> : "*Dian wear a red blouse in the house*"

<https://www.aljabargeometri.com> : "*Big Edi ride a red big car in the road*"

<https://www.aljabarlinear.com> : "*Dian ride a very big big red car in the road*"

- a. Carilah similaritas antara keyword yang dimasukkan oleh user tersebut dengan ketiga website tersebut.
- b. Lakukan perankingan website tersebut.

Jawaban:

a) Misalkan vector query dilambangkan dengan  $Q$ , vector website <https://www.algeo.com> dilambangkan dengan vector  $D1$ , vector <https://www.aljabargeometri.com> dilambangkan dengan vektor  $D2$ , dan vektor <https://www.aljabarlinear.com> dilambangkan dengan  $D3$ .

Term	Vektor Query Q	Vektor D1	Vektor D2	Vektor D3
a	0	1	1	1
big	1	0	2	2
blouse	0	1	0	0
car	1	0	1	1

Dian	0	1	0	1
Edi	0	0	1	0
house	0	1	0	0
in	0	1	1	1
red	1	1	1	0
ride	0	0	1	1
road	0	0	1	1
the	0	1	1	1
very	0	0	0	1
wear	0	1	0	0

Panjang vector query  $Q = |Q| = \sqrt{\text{POWER}(1;2)+\text{POWER}(1;2)+\text{POWER}(1;2)}=1,73$

Panjang vector dokumen D1 =  $|D1| = \sqrt{\text{POWER}(1;2)+\text{POWER}(1;2)+\text{POWER}(1;2)+\text{POWER}(1;2)+\text{POWER}(1;2)+\text{POWER}(1;2)} = 2,83$

Panjang vector dokumen D2 =  $|D2| = \sqrt{\text{POWER}(1;2)+\text{POWER}(2;2)+\text{POWER}(1;2)+\text{POWER}(1;2)+\text{POWER}(1;2)+\text{POWER}(1;2)+\text{POWER}(1;2)} = 3,46$

Panjang vector dokumen D3 =  $|D3| = \sqrt{\text{POWER}(1;2)+\text{POWER}(2;2)+\text{POWER}(1;2)+\text{POWER}(1;2)+\text{POWER}(1;2)+\text{POWER}(1;2)+\text{POWER}(1;2)} = 3,46$

Similaritas query Q dengan dokumen D1 =  $\frac{Q \cdot D1}{|Q| \cdot |D1|}$

$$= \frac{(1 \cdot 0) + (1 \cdot 0) + (1 \cdot 1)}{(1,73 \cdot 2,83)} = 0,20$$

Similaritas query Q dengan dokumen D1 =  $\frac{Q \cdot D2}{|Q| \cdot |D2|}$

$$= \frac{(1 \cdot 2) + (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1)}{(1,73 \cdot 3,46)} = 0,67$$

Similaritas query Q dengan dokumen D1 =  $\frac{Q \cdot D3}{|Q| \cdot |D3|}$

$$= \frac{(1 \cdot 2) + (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1)}{(1,73 \cdot 3,46)} = 0,67$$

Pertanyaan B :

Karena similaritas dokumen D2 dan dokumen D3 sama maka ada 2 kemungkinan ranking yaitu Ranking

- |       |      |       |
|-------|------|-------|
| 1) D2 | atau | 1) D3 |
| 2) D3 |      | 2) D2 |
| 3) D1 |      | 3) D1 |

Alternatif jawaban versi lain yang lebih ringkas:

$$\text{Similaritas}(Q, D1) = \frac{Q \cdot D1}{|Q| \cdot |D1|} = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$\text{Similaritas}(Q, D2) = \frac{Q \cdot D2}{|Q| \cdot |D2|} = \frac{4}{\sqrt{12}}$$

$$\text{Similaritas}(Q, D3) = \frac{Q \cdot D3}{|Q| \cdot |D3|} = \frac{4}{\sqrt{12}}$$

Pertanyaan b)

Karena similaritas dokumen D2 dan dokumen D3 sama maka ada 2 kemungkinan ranking yaitu Ranking

- |       |      |       |
|-------|------|-------|
| 1) D2 | atau | 1) D3 |
| 2) D3 |      | 2) D2 |
| 3) D1 |      | 3) D1 |

4. Diberikan dua buah bidang:  $2x - y - z = 5$  dan  $-4x + 2y + 2z = 12$ . Apakah kedua bidang tersebut sejajar atau berpotongan? Jika sejajar, tentukan jarak antara kedua bidang. Jika berpotongan, tentukan garis perpotongannya.

Jawaban:

Tentukan terlebih dahulu normal setiap bidang:

$$2x - y - z = 5 \quad \rightarrow \mathbf{n}_1 = (2, -1, -1)$$

$$-4x + 2y + 2z = 12 \quad \rightarrow \mathbf{n}_2 = (-4, 2, 2)$$

Oleh karena  $\mathbf{n}_2 = -2\mathbf{n}_1$ , yaitu normal bidang 2 adalah  $-2$  kali normal bidang 1, maka kedua vector tersebut sejajar (parallel).

Jarak kedua bidang dihitung sebagai berikut:

Tentukan sebuah titik pada bidang satu sebagai  $P_0$ : ambil  $x = 0$  dan  $y = 0$ , maka  $z = 0 - 0 - 5 = -5$   
Jadi  $P_0 (0, 0, -5)$

Hitung jarak dari  $(0, 0, -5)$  ke bidang  $-4x + 2y + 2z - 12 = 0$  sbb:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|-4(0) + 2(0) + 2(-5) - 12|}{\sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (2)^2}} = \frac{22}{\sqrt{24}} = \frac{11}{\sqrt{6}}$$