Institut Teknologi Bandung
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Program Studi Teknik Informatika

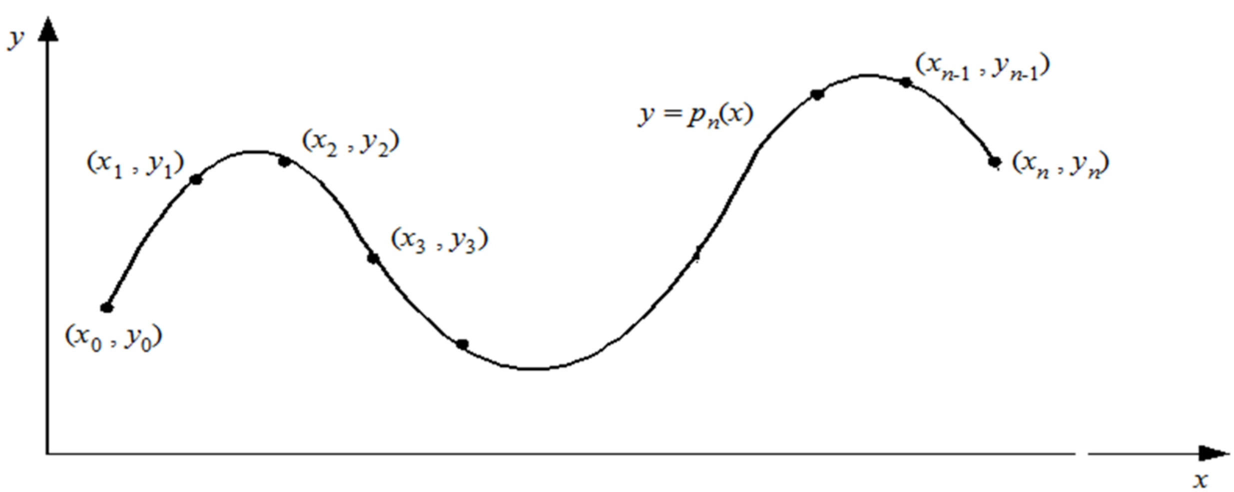
Tugas Besar 1 IF2123 Aljabar Geometri
Sistem Persamaan Linier dan Aplikasinya
Semester Tahun 2018/2019

Sistem persamaan linier (SPL) dengan *n* peubah (*variable*) dan *m* persamaan adalah berbentuk

$$
\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots. + a_{1n} x_n &= b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots. + a_{2n} x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \vdots \\
\vdots \qquad\qquad & \vdots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots. + a_{mn} x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

yang dalam hal ini x_i adalah peubah, a_{ij} dan b_i adalah koefisien $\in$ R. Sembarang SPL dapat diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss dan metode eliminasi Gauss-Jordan. Solusi sebuah SPL mungkin tidak ada, banyak, atau hanya satu (unik/tunggal).

Sistem persamaan linier memiliki banyak aplikasi dalam bidang sains dan rekayasa, salah satunya adalah mengestimasi nilai fungsi dengan interpolasi polinom. Persoalan interpolasi polinom adalah sebagai berikut: Diberikan n+1 buah titik berbeda, (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). Tentukan polinom $p_n(x)$ yang menginterpolasi (melewati) semua titik-titik tersebut sedemikian rupa sehingga $y_i = p_n(x_i)$ untuk $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.



Setelah polinom interpolasi $p_n(x)$ ditemukan, $p_n(x)$ dapat digunakan untuk menghitung perkiraan nilai y di sembarang titik di dalam selang $[x_0, x_n]$.

Polinom interpolasi derajat n yang menginterplolasi titik-titik (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). adalah berbentuk $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$. Jika hanya ada dua titik, (x_0, y_0) dan (x_1, y_1), maka polinom yang menginterpolasi kedua titik tersebut adalah $p_1(x) = a_0 + a_1x$ yaitu berupa persamaan garis lurus. Jika tersedia tiga titik, (x_0, y_0), (x_1, y_1), dan (x_2, y_2), maka polinom yang menginterpolasi ketiga titik tersebut adalah $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ atau persaman kuadrat dan kurvanya berupa parabola. Jika tersedia empat titik, (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), dan (x_3, y_3), polinom yang menginterpolasi keempat titik tersebut adalah $p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, demikian seterusnya. Dengan cara yang sama kita dapat membuat polinom interpolasi berderajat n untuk n yang lebih tinggi asalkan tersedia $(n+1)$ buah titik data. Dengan menyulihkan (x_i, y_i) ke dalam persamaan polinom $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ untuk $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, akan diperoleh n buah sistem persamaan lanjar dalam $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$,

$$
\begin{aligned}
&a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\
&a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\
&\ldots \qquad\qquad \ldots \\
&a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n
\end{aligned}
$$

Solusi sistem persamaan lanjar ini, yaitu nilai $a_0, a_1, \ldots, a_n$, diperoleh dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang sudah anda pelajari. Sebagai contoh, misalkan diberikan tiga buah titik yaitu (8.0, 2.0794), (9.0, 2.1972), dan (9.5, 2.2513). Tentukan polinom interpolasi kuadratik lalu estimasi nilai fungsi pada $x = 9.2$. Polinom kuadratik berbentuk $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Dengan menyulihkan ketiga buah titik data ke dalam polinom tersebut, diperoleh sisten persamaan lanjar yang terbentuk adalah

$$a_0 + 8.0a_1 + 64.00a_2 = 2.0794$$

$$a_0 + 9.0a_1 + 81.00a_2 = 2.1972$$

$$a_0 + 9.5a_1 + 90.25a_2 = 2.2513$$

Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan $a_0 = 0.6762$, $a_1 = 0.2266$, dan $a_2 = -0.0064$. Polinom interpolasi yang melaluiketiga buah titik tersebut adalah $p_2(x) = 0.6762 + 0.2266x - 0.0064x^2$. Dengan menggunakan polinom ini, maka nilai fungsi pada $x = 9.2$ dapat ditaksir sebagai berikut: $p_2(9.2) = 0.6762 + 0.2266(9.2) - 0.0064(9.2)^2 = 2.2192$.

SPESIFIKASI TUGAS

Buatlah program dalam Bahasa Java untuk mengimplementasikan metode eliminasi Gauss dan metode Eliminasi Gauss-Jordan, dan mengaplikasikannya untuk persoalan interpolasi. Spesifikasi program adalah sebagai berikut:

1. Program dapat menerima masukan (input) baik dari *keyboard* maupun membaca masukan dari file text. Masukan dari *keyboard* adalah m, n, koefisien a_{ij} , dan b_i. Jika masukan dari *file* maka berbentuk matriks *augmented* tanpa tanda kurung. Misalnya,

```
3   4.5 2.8  10 12
-3  7   8.3  11 -4
0.5 -10 -9   12 0
```

2. Untuk persoalan interpolasi, masukannya jika dari *keyboard* adalah n, (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), dan nilai x yang akan ditaksir nilai fungsinya. Jika masukanya dari file, maka titik-titik dinyatakan pada setiap baris tanpa koma dan tanda kurung. Misalnya jika titik-titik datanya adalah (8.0, 2.0794), (9.0, 2.1972), dan (9.5, 2.2513), maka di dalam file text ditulis sebagai berikut:

```
8.0 2.0794
9.0 2.1972
9.5 2.2513
```

3. Luaran (*output*) program adalah solusi SPL. Jika solusinya tunggal, tuliskan nilainya. Jika solusinya tidak ada, tuliskan solusi tidak ada, jika solusinya banyak, maka tuliskan solusinya dalam bentuk parametrik (misalnya $x_4 = -2$, $x_3 = 2s - t$, $x_2 = s$, dan $x_1 = t$.

4. Untuk persoalan polinom interpolasi, luarannya adalah persamaan polinom dan taksiran nilai fungsi pada x yang diberikan.

5. Luaran program harus dapat ditampilkan **pada layar komputer dan dapat disimpan ke dalam file**.

6. Bahasa program yang digunakan adalah Java dengan kakas pengembangan program adalah J2SE.

7. Program **tidak harus** berbasis GUI, cukup text-based saja, namun tidak dilarang menggunakan GUI (memakai Eclipse).

8. Program dapat dibuat dengan pilihan menu. Urutan menu dan isinya dipersilakan ditrancang masing-masing. Misalnya, menu:

```
MENU
1. Sistem Persamaaan Linier
2. Interpolasi Polinom
3. Keluar
```

Untuk setiap pilihan menu ada sub-menu lagi yaitu piliha metode:

```
1. Metode elimnasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
```

PROSEDUR PENGERJAAN

1. Tugas dikerjakan secara berkelompok yang terdiri dari 3 orang.
2. Tugas ini dikumpulkan hari Jumat 5 Oktober 2018 paling lambat pukul 7.30 pagi di atas loker Lab IRK. Silakan isi presens pengumpulan dan tanggal untuk demo program di depan asisten. Penilaian tugas adalah melalui demo di depan asisten.

LAPORAN

1. *Cover*: *Cover* laporan ada foto anggota kelompok (foto bertiga, bebas gaya). Foto ini menggantikan logo "gajah" ganesha.

   Bab 1: Deskripsi masalah (dapat meng-*copy paste* file tugas ini). File doc akan dikirim lewat milis, file pdf dapat diunduh dari laman web

   http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2018-2019/algeo18-19.htm

   Bab 2: Teori singkat mengenai metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, interpolasi polinom. Sertakan pula pseudo-code algoritma Gauss dan Gauss-Jordan.

   Bab 3: Implementasi program dalam Java, meliputi struktur *class* yang didefinisikan (atribut dan method), garis besar program, dll.

   Bab 4: Eksperimen. Bab ini beris hasil eksekusi program terhadap contoh-contoh kasus yang diberikan berikut analisis hasil eksekusi tersebut

   Bab 5: Kesimpulan, saran, dan refleksi (hasil yang dicapai, saran pengembangan, dan refleksi anda terhadap tugas ini).

   Tuliskan juga referensi (buku, web), yang dipakai/diacu di dalam Daftar Referensi.

   Keterangan laporan dan program:

   a) Laporan ditulis dalam bahasa Indonesia yang baik dan benar, tidak perlu panjang tetapi tepat sasaran dan jelas.
   b) Laporan tidak perlu memakai *cover* mika dan dijilid. Cukup dibuat agar laporan tidak akan tercecer bila dibaca.
   c) Laporan boleh menggunakan kertas rius, boleh bolak-balik, boleh dalam satu halaman kertas terdapat dua halaman tulisan asalkan masih terbaca.
   d) Identitas per halaman harus jelas (misalnya : halaman, kode kuliah).
   e) *Listing* program tidak perlu disertakan pada laporan.
   e) Program disimpan di dalam *folder* Algeo-xxxxx. Lima digit terakhir adalah NIM anggota terkecil. Didalam *folder* tersebut terdapat tiga folder bin, src dan doc yang masing-masing berisi :
      Folder *bin* berisi *java byte code* (.class)
      Folder *src* berisi *source code* dari program java
      Folder *test* berisi data uji.
      Folder *doc* berisi dokumentasi program dan *readme*

PENGUMPULAN TUGAS

1. Yang diserahkan saat pengumpulan tugas adalah:
   a) CD/DVD/flashdisk yang berisi program sumber (*source code*) dan arsip java yang sudah dikompilasi tanpa ada kesalahan.
   b) Laporan (hard copy)
2. *Java bytecode* di dalam CD/DVD dapat dijalankan. Asisten pemeriksa tidak akan melakukan *setting* atau kompilasi lagi agar program dapat berjalan. Program yang tidak dapat dijalankan tidak akan diberi nilai.
3. CD dan laporan akan dikembalikan setelah dinilai.

PENILAIAN

Komposisi penilaian umum adalah sebagai berikut :

1. Program: 80 %
2. Laporan : 20 %

STUDI KASUS

Untuk menguji program anda, tes dengan beberapa SPL dan persoalan interpolasi polinom sebagai berikut:

1. SPL berbentuk

$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0$

$2x_1 + 6x_2 – 5x_3 - 2x_4 + 4x_4 - 3x_6 = -1$

$5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5$

$2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_4 + 18x_6 = 6$

2. SPL berbentuk matriks *augmented*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

3. SPL berbentuk matriks *augmented*

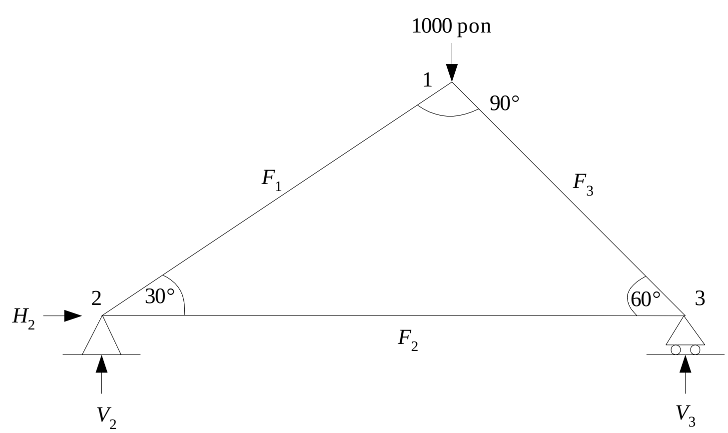
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. SPL berbentuk

$$
\begin{aligned}
x_7 + x_8 + x_9 &= 13.00 \\
x_4 + x_5 + x_6 &= 15.00 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 8.00 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_6 + x_8) + 0.61396x_9 &= 14.79 \\
0.91421(x_3 + x_5 + x_7) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 14.31 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_2 + x_4) + 0.61396x_1 &= 3.81 \\
x_3 + x_6 + x_9 &= 18.00 \\
x_2 + x_5 + x_8 &= 12.00 \\
x_1 + x_4 + x_7 &= 6.00 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_2 + x_6) + 0.61396x_3 &= 10.51 \\
0.91421(x_1 + x_5 + x_9) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 16.13 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_4 + x_8) + 0.61396x_7 &= 7.04
\end{aligned}
$$

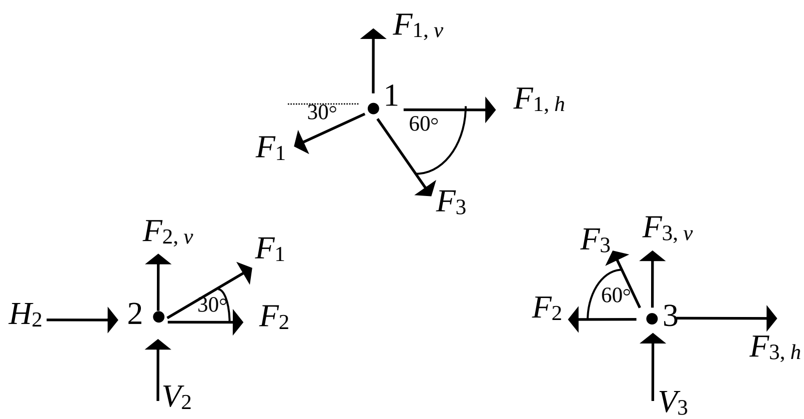
5. Misalkan seorang insinyur Teknik Sipil merancang sebuah rangka statis yang berbentuk segitiga (Gambar 1). Ujung segitiga yang bersudut 30° bertumpu pada sebuah penyangga statis, sedangkan ujung segitiga yang lain bertumpu pada penyangga beroda.

   Rangka mendapat gaya eksternal sebesar 1000 pon. Gaya ini disebar ke seluruh bagian rangka. Gaya *F* menyatakan tegangan atau kompresi pada anggota rangka. Reaksi eksternal (H_2, V_2, dan V_3) adalah gaya yang mencirikan bagaimana rangka berinteraksi dengan permukaan pendukung. Engsel pada simpul 2 dapat menjangkitkan gaya mendatar dan tegak pada permukaan, sedangkan gelinding pada simpul 3 hanya menjangkitkan gaya tegak.



Gambar 1 Gaya-gaya pada rangka statis tertentu

Struktur jenis ini dapat diuraikan sebagai sistem persamaan aljabar lanjar simultan. Diagram gaya-benda-bebas diperlihatkan untuk tiap simpul dalam Gambar 2.



Gambar 2 Diagram gaya-benda-bebas untuk simpul-simpul rangka statis

Menurut hukum Newton, resultan gaya dalam arah mendatar maupun tegak harus nol pada tiap simpul, karena sistem dalam keadaan diam (statis). Oleh karena itu, untuk simpul 1,

$$\sum F_H = 0 = -F_1 \cos 30° + F_3 \cos 60° + F_{1,h}$$
$$\sum F_V = 0 = -F_1 \sin 30° - F_3 \sin 60° + F_{1,v}$$

untuk simpul 2,

$$\sum F_H = 0 = F_2 + F_1 \cos 30° + F_{2,h} + H_2$$
$$\sum F_V = 0 = F_1 \sin 30° - F_{2,v} + V_2$$

dan untuk simpul 3,

$$\sum F_H = 0 = -F_2 - F_3 \cos 60° + F_{3,h}$$
$$\sum F_V = 0 = F_3 \sin 60° + F_{3,v} + V_3$$

Gaya 1000 pon ke bawah pada simpul 1 berpadanan dengan $F_{1,v}$ = -1000, sedangkan semua $F_{i,v}$ dan $F_{i,h}$ lainnya adalah nol. Persoalan rangka statis ini dapat dituliskan sebagai sistem yang disusun oleh enam persamaan lanjar dengan 6 peubah yang tidak diketahui:

$$\sum F_H = 0 = -F_1 \cos 30° + F_3 \cos 60° + F_{1,h} = -0.866F_1 + 0.5\, F_3$$
$$\sum F_V = 0 = -F_1 \sin 30° - F_3 \sin 60° + F_{1,v} = -0.5F_1 - 0.866\, F_3 + 1000$$
$$\sum F_H = 0 = F_2 + F_1 \cos 30° + F_{2,\mathrm{h}} + H_2 = F_2 + 0.866F_1 + 0 + H_2$$
$$\sum F_V = 0 = F_1 \sin 30° - F_{2,v} + V_2 = 0.5\, F_1 + V_2$$
$$\sum F_H = 0 = -F_2 - F_3 \cos 60° + F_{3,h} = -F_2 - 0.5\, F_3$$
$$\sum F_V = 0 = F_3 \sin 60° + F_{3,v} + V_3 = 0.866\, F_3 + V_3$$

Keenam persamaan di atas ditulis ulang kembali dalam susunan yang teratur berdasarkan urutan peubah F_1, F_2, F_3, H_2, V_2, V_3:

$$-0.866F_1 \quad + \; 0.5\, F_3 \qquad\qquad = 0$$

$$
\begin{array}{llllll}
-0.5F_1 & & -0.866\,F_3 & & & = -1000 \\
-0.866F_1 & -F_2 & & -H_2 & & = 0 \\
-0.5\,F_1 & & & & -V_2 & = 0 \\
& -F_2 & -0.5\,F_3 & & & = 0 \\
& & -0.866\,F_3 & & -V_3 & = 0
\end{array}
$$

Tentukan solusi sistem di atas!

6. **(Interpolasi)** Gunakan tabel di bawah ini untuk mencari polinom interpolasi dari pasangan titik-titik yang terdapat dalam tabel. Program menerima masukan nilai *x* yang akan dicari nilai fungsi *f*(*x*).

x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
f(*x*)	0.003	0.067	0. 148	0.248	0.370	0.518	0.697

Lakukan pengujian pada nilai-nilai default berikut:

x = 0.2 f(x) = ?
x = 0.55 f(x) = ?
x = 0.85 f(x) = ?
x = 1.28 f(x) = ?

7. **(Interpolasi)** Harga rumah baru dari tahun 1950 hingga 1969 mengalami perubahan yang tercatat sebagai berikut:

Tahun	Harga ($ juta)
1950	33,525
1955	46,519
1960	53,941
1965	72,319
1966	75,160
1967	76,160
1968	84,690
1969	90,866

Berdasarkan data tersebut prediksilah harga rumah baru pada tahun 1957, 1964, 1970, 1975 (atau nilai lain sesuai masukan user) dengan menggunakan polinom interpolasi.

8. Sederhanakan fungsi y = $1/(\sqrt{(x^2 + 2)}$ dengan polinom interpolasi derajat *n* di dalam selang [1, 5]. Sebagai contoh, jika *n* = 5, maka titik-titik *x* yang diambil di dalam selang [1, 5] berjarak *h* = (5 – 1)/5.