

Aplikasi Metode Eliminasi Gauss pada Metode Numerik

IF2123 Aljabar Geometri

Oleh: Rinaldi Munir
Program Studi Informatika, STEI-ITB

Apa itu Metode Numerik?

- **Numerik**: berhubungan dengan angka
- **Metode**: cara yang sistematis untuk menyelesaikan persoalan guna mencapai tujuan yang ditentukan
- **Metode numerik**: cara sistematis untuk menyelesaikan persoalan matematika dengan operasi angka (+, -, *, /)

- Cara penyelesaian persoalan matematika ada dua:
 1. Secara analitik → solusinya eksak (tepat)
 2. Secara numeric → solusinya hampiran (aproksimasi)
- *Secara analitik*: menggunakan rumus dan teorema yang sudah baku di dalam matematika → metode analitik
- *Secara numerik*: menggunakan pendekatan aproksimasi untuk mencari solusi hanya dengan operasi aritmetika biasa → metode numerik.

- Contoh: Menghitung integral $\int_{-1}^1 (4 - x^2) dx$

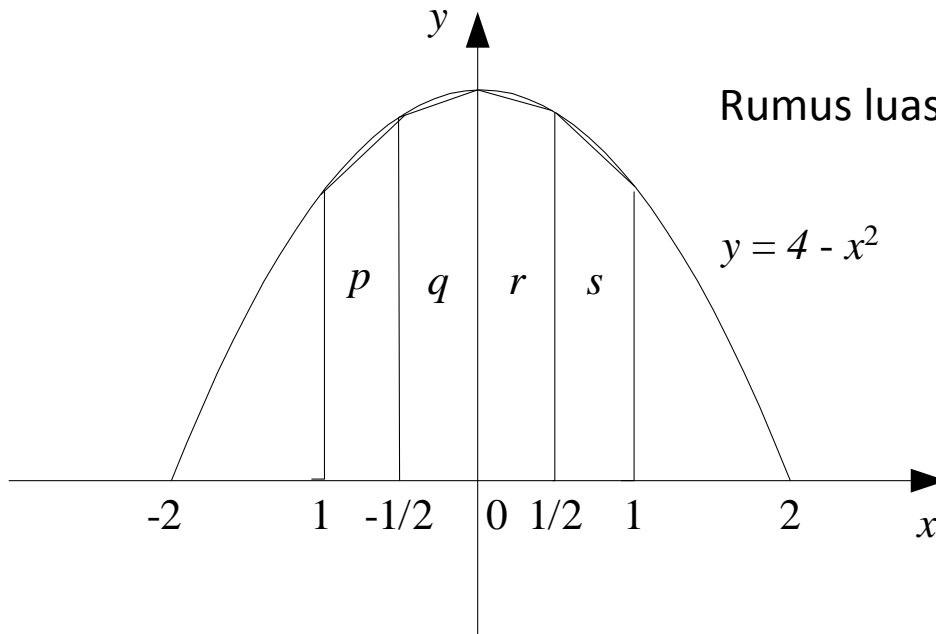
Metode analitik:

Rumus: $\int ax^n dx = \frac{1}{n+1} ax^{n+1} + C$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (4 - x^2) dx &= \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{x=-1}^{x=1} \\ &= \left[4(1) - \frac{1}{3}(1) \right] - \left[4(-1) - \frac{1}{3}(-1) \right] = 22/3 = 7.33 \end{aligned}$$

- *Metode numerik*

Nilai integral = luas daerah di bawah kurva



Rumus luas trapesium = (jumlah sisi sejajar x tinggi)/2

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 (4 - x^2) dx &\approx p + q + r + s \approx \{[f(-1) + f(-1/2)] \times 0.5/2\} + \{[f(-1/2) + f(0)] \times 0.5/2\} + \\
 &\quad \{[f(0) + f(1/2)] \times 0.5/2\} + \{[f(1/2) + f(1)] \times 0.5/2\} \\
 &\approx 0.5/2 \{f(-1) + 2f(-1/2) + 2f(0) + 2f(1/2) + f(1)\} \\
 &\approx 0.5/2 \{3 + 7.5 + 8 + 7.5 + 3\} \\
 &\approx 7.25
 \end{aligned}$$

- Solusi dengan metode numerik adalah solusi hampiran (aproksimasi)
- Hampiran terhadap solusi eksak
- Oleh karena itu, solusi numerik mengandung galat.
- **Galat** (ε): perbedaan antara solusi hampiran dengan solusi eksak.
- Definisi: $\varepsilon = a - \hat{a}$
- Salah satu sumber galat adalah galat pembulatan (*rounding error*).

- **Galat pembulatan:** galat yang timbul akibat keterbatasan komputer dalam merepresentasikan bilangan riil.
- **Contoh 6:** $1/6 = 0.1666666666\dots$, dalam mesin dengan 6-digit direpresentasikan sebagai 0.166667.
Galat pembulatan = $1/6 - 0.166667 = -0.000000333$.
- Contoh dalam sistem biner misalnya $1/10 = 0.00011001100110011001100110011\dots_2$ direpresentasikan di dalam komputer dalam jumlah bit yang terbatas.

Representasi bilangan riil di dalam komputer:

1. Bilangan titik-tetap (*fixed-point*)

Setiap bilangan riil disajikan dengan jumlah tempat desimal yang tetap

Contoh: 62.358, 0.013, 1.000.

2. Bilangan titik-kambang (*floating-point*)

Setiap bilangan riil disajikan dengan jumlah digit *berarti* yang sudah tetap

Contoh: 0.6238×10^3 , 0.1714×10^{-13}

Bilangan Titik-Kambang

- Bilangan riil di dalam komputer umumnya disajikan dalam format *bilangan titik-kambang*
- Bilangan titik-kambang a ditulis sebagai

$$a = \pm m \times B^p = \pm 0.d_1d_2d_3d_4d_5d_6 \dots d_n \times B^p$$

m = mantisa (riil), $d_1d_2d_3d_4d_5d_6 \dots d_n$ adalah digit mantisa.

B = basis sistem bilangan yang dipakai (2, 8, 10, 16, dsb)

p = pangkat (berupa bilangan bulat), dari $-P_{\min}$ sampai $+P_{\max}$

- Contoh: $245.7654 \rightarrow 0.2457654 \times 10^3$

Pembulatan pada Bilangan Titik-Kambang

- Bilangan riil di dalam komputer mempunyai rentang nilai yang terbatas.
- Bilangan titik-kambang yang tidak dapat mencocoki satu dari nilai-nilai di dalam rentang nilai yang tersedia, dibulatkan ke salah satu nilai di dalam rentang.
- Galat yang timbul akibat penghampiran tersebut diacu sebagai **galat pembulatan**.

Pembulatan ke digit terdekat (*in-rounding*)

Misalkan $a = \pm 0.d_1d_2d_3 \dots d_nd_{n+1} \dots \times 10^p$

$$fl_{\text{round}}(a) = \pm 0.d_1d_2d_3 \dots \hat{d}_n 10^p$$

$$\hat{d}_n = \begin{cases} d_n & , \text{jika } d_{n+1} < 5 \\ d_n + 1 & , \text{jika } d_{n+1} > 5 \\ d_n & , \text{jika } d_{n+1} = 5 \text{ dan } n \text{ genap} \\ d_n + 1 & , \text{jika } d_{n+1} = 5 \text{ dan } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

- **Contoh:** $a = 0.5682785715287 \times 10^{-4}$:
 - di dalam komputer dengan mantissa 7 digit dibulatkan menjadi $fl_{\text{round}}(a) = 0.5682786 \times 10^{-4}$
 - di dalam komputer dengan mantissa 8 digit dibulatkan menjadi $fl_{\text{round}}(a) = 0.56827857 \times 10^{-4}$
 - di dalam komputer dengan mantissa 6 digit dibulatkan menjadi $fl_{\text{round}}(a) = 0.568278 \times 10^{-4}$
 - di dalam komputer dengan mantissa 9 digit dibulatkan menjadi $fl_{\text{round}}(a) = 0.568278572 \times 10^{-4}$

Dua persoalan matematika yang akan diselesaikan secara numerik berdasarkan teori di dalam aljabar linier:

- 1. Solusi sistem persamaan linier**
- 2. Interpolasi polinom**

Sistem Persamaan Linjar (SPL)

- **Persoalan:** Carilah solusi X yang memenuhi sistem persamaan linjar

$$AX = B,$$

yang dalam hal ini,

$A = [a_{ij}]$ adalah matriks berukuran $n \times n$

$X = [x_j]$ adalah matriks berukuran $n \times 1$

$B = [b_j]$ adalah matriks berukuran $n \times 1$ (vektor kolom)

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Pemecahan SPL secara numerik

- Apabila SPL diselesaikan dengan computer, maka akan timbul galat pembulatan pada solusinya karena operasi aritmerika bilangan titik-kambang.
- Untuk memperoleh solusi SPL yang mengandung galat yang minimal akibat pembulatan, maka digunakan *tatancang pemerosan (pivoting strategy)*.
(*pivot* = poros, *pivoting* = pemerosan)

Tatancang pemrosesan: Pilih *pivot* dari semua elemen pada kolom p yang mempunyai nilai mutlak terbesar,

$$|a_{k,p}| = \max\{|a_{p,p}|, |a_{p+1,p}|, \dots, |a_{n-1,p}|, |a_{n,p}|\}$$

- lalu pertukarkan baris ke- k dengan baris ke- p .

$$\left[\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \end{array} \right]$$



Cari $|x|$ terbesar, lalu pertukarkan barisnya dengan baris ke-2

Contoh: Selesaikan SPL berikut dengan metode eliminasi Gauss yang menerapkan tatancang pemrosesan:

$$0.00044x_1 + 0.0003x_2 - 0.0001x_3 = 0.00046$$

$$4x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 = 1.5$$

$$3x_1 - \quad 9.2x_2 - 0.5x_3 = -8.2$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 0.00044 & 0.0003 & -0.0001 & 0.00046 \\ 4 & 1 & 1 & 1.5 \\ 3 & -9.2 & -0.5 & -8.2 \end{bmatrix} R1 \leftrightarrow R2 \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1.5 \\ 0.00044 & 0.0003 & -0.0001 & 0.00046 \\ 3 & -9.2 & -0.5 & -8.2 \end{bmatrix}$$

$$R1/4 \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.25 & 0.375 \\ 0.00044 & 0.0003 & -0.0001 & 0.00046 \\ 3 & -9.2 & -0.5 & -8.2 \end{bmatrix} \begin{matrix} R2 - 0.00044R1 \\ R3 - 3R1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.25 & 0.375 \\ 0 & 0.000190 & -0.00021 & 0.000295 \\ 0 & -9.95 & -1.25 & -9.32 \end{bmatrix}$$

$$R2 \leftrightarrow R3 \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.25 & 0.375 \\ 0 & -9.95 & -1.25 & -9.32 \\ 0 & 0.000190 & -0.00021 & 0.000295 \end{bmatrix} R2 / (-9.95) \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.25 & 0.375 \\ 0 & 1 & 0.126 & 0.937 \\ 0 & 0.000190 & -0.00021 & 0.000295 \end{bmatrix}$$

$$R3 - 0.000190R2 \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.25 & 0.375 \\ 0 & 1 & 0.126 & 0.937 \\ 0 & 0 & -0.000234 & 0.000117 \end{bmatrix} R3 / (-0.000234) \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.25 & 0.375 \\ 0 & 1 & 0.126 & 0.937 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Diperoleh sistem persamaan:

$$\begin{aligned}x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 &= 0.375 \\x_2 + 0.126x_3 &= 0.937 \\x_3 &= -0.5\end{aligned}$$

Selesaikan dengan teknik sulih mundur, diperoleh:

$$x_1 = 0.250; \quad x_2 = 1.00; \quad x_3 = -0.500$$

Jika SPL di atas diselesaikan tanpa tatancang pemerosan, maka solusinya:

$$x_1 = 0.245; \quad x_2 = 1.01; \quad x_3 = -0.492$$

Bandingkan dengan solusi eksaknya adalah:

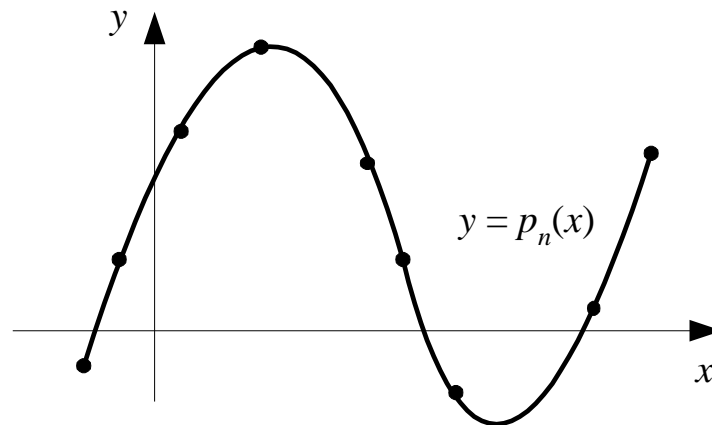
$$x_1 = \frac{1}{4}; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = -\frac{1}{2}$$

Interpolasi

Persoalan: Diberikan $n+1$ buah titik berbeda, $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Tentukan polinom $p_n(x)$ yang menginterpolasi (melewati) semua titik-titik tersebut sedemikian rupa sehingga

$$y_i = p_n(x_i) \quad \text{untuk } i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Setelah polinom interpolasi $p_n(x)$ ditemukan, $p_n(x)$ dapat digunakan untuk menghitung perkiraan nilai y di $x = a$, yaitu $y = p_n(a)$.



Contoh persoalan interpolasi:

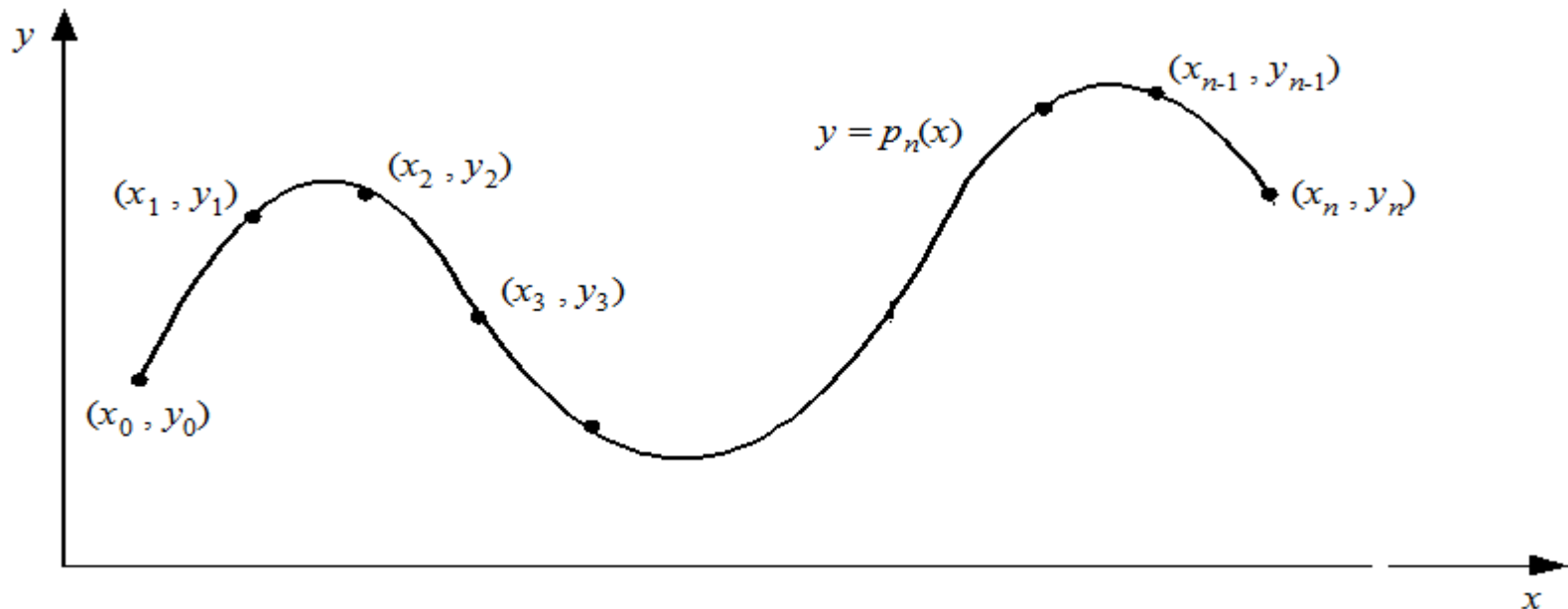
Sebuah pengukuran fisika telah dilakukan untuk menentukan hubungan antara tegangan yang diberikan kepada baja tahan-karat dan waktu yang diperlukan hingga baja tersebut patah. Delapan nilai tegangan yang berbeda dicobakan, dan data yang dihasilkan adalah [CHA91]:

Tegangan yang diterapkan, x , kg/mm^2	5	10	15	20	25	30	35	40
Waktu patah, y , jam	40	30	25	40	18	20	22	15

Persoalan: Berapa waktu patah y jika tegangan x yang diberikan kepada baja adalah 12 kg/mm^2 .

- Polinom interpolasi derajat n yang menginterpolasi titik-titik $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ adalah

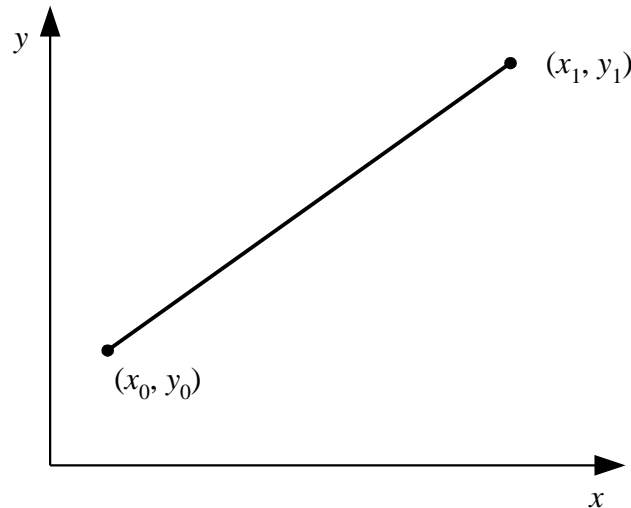
$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$



1. Interpolasi Lanjar

- Interpolasi lanjar adalah interpolasi dua buah titik dengan sebuah garis lurus.
- Misal diberikan dua buah titik, (x_0, y_0) dan (x_1, y_1) . Polinom yang menginterpolasi kedua titik itu adalah

$$p_1(x) = a_0 + a_1x$$



$$y_0 = a_0 + a_1x_0$$

$$y_1 = a_0 + a_1x_1$$



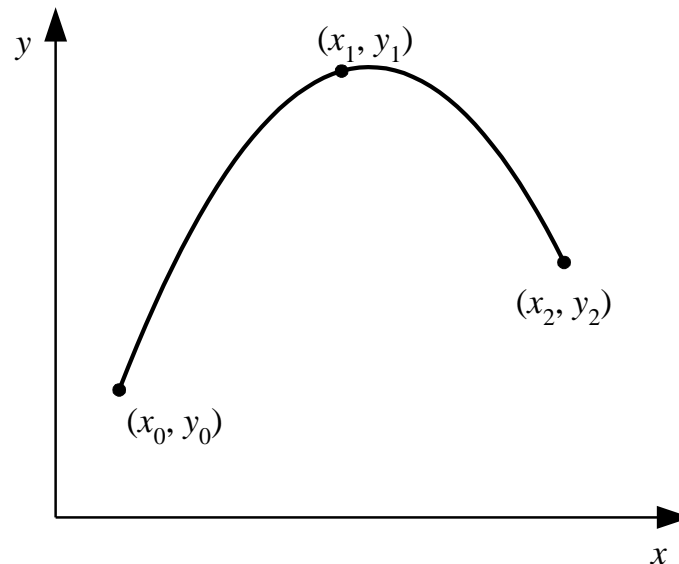
Pecahkan SPL ini dengan metode eliminasi Gauss untuk memperoleh nilai a_0 dan a_1

2. Interpolasi Kuadrat

- Misal diberikan tiga buah titik data, (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , dan (x_2, y_2) .
- Polinom yang menginterpolasi ketiga buah titik itu adalah polinom kuadrat yang berbentuk:

$$p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

- Bila digambar, kurva polinom kuadrat berbentuk parabola



- Polinom $p_2(x)$ ditentukan dengan cara berikut:
 - 1) Sulihkan (x_i, y_i) ke dalam persamaan $p_2(x)$, $i = 0, 1, 2$. Dari sini diperoleh tiga buah persamaan dengan tiga buah parameter yang tidak diketahui, yaitu a_0 , a_1 , dan a_2 :

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = y_0$$

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = y_1$$

$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = y_2$$

- 2) hitung a_0 , a_1 , a_2 dari sistem persamaan tersebut dengan metode eliminasi Gauss.

Contoh: Diberikan titik (8.0, 2.0794), (9.0, 2.1972), dan (9.5, 2.2513).
Tentukan polinom interpolasi kuadratik dan estimasi nilai fungsi di $x = 9.2$.

Penyelesaian:

Sisten persamaan linjar yang terbentuk adalah

$$a_0 + 8.0a_1 + 64.00a_2 = 2.0794$$

$$a_0 + 9.0a_1 + 81.00a_2 = 2.1972$$

$$a_0 + 9.5a_1 + 90.25a_2 = 2.2513$$

Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan $a_0 = 0.6762$, $a_1 = 0.2266$, dan $a_3 = -0.0064$. Polinom kuadratnya adalah

$$p_2(x) = 0.6762 + 0.2266x - 0.0064x^2$$

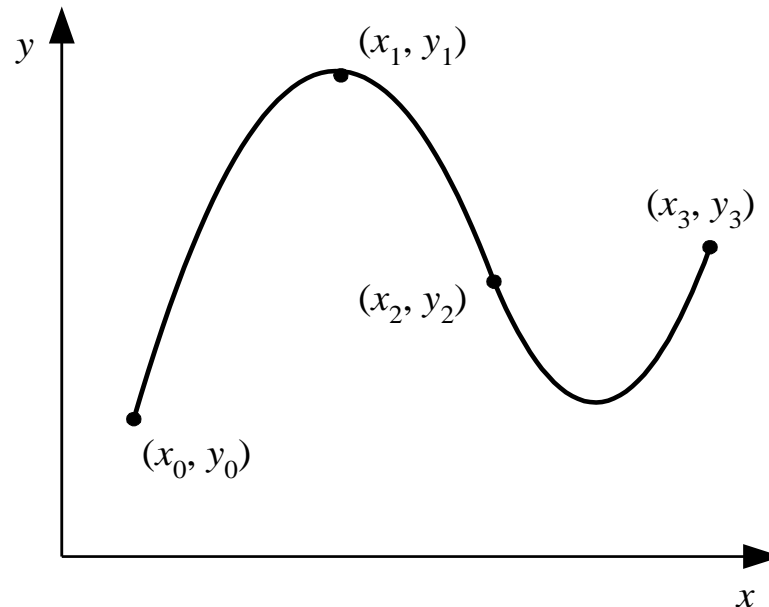
sehingga

$$p_2(9.2) = 2.2192$$

3. Interpolasi Kubik

- Misal diberikan empat buah titik data, (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , dan (x_3, y_3) .
- Polinom yang menginterpolasi keempat buah titik itu adalah polinom kubik yang berbentuk:

$$p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$



- Polinom $p_3(x)$ ditentukan dengan cara berikut:
 - 1) sulihkan (x_i, y_i) ke dalam persamaan (P.5.9) , $i = 0, 1, 2, 3$. Dari sini diperoleh empat buah persamaan dengan empat buah parameter yang tidak diketahui, yaitu a_0 , a_1 , a_2 , dan a_3 :

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 = y_0$$

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 = y_1$$

$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 = y_2$$

$$a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 = y_3$$

- 2) hitung a_0 , a_1 , a_2 , dan a_3 dari sistem persamaan tersebut dengan metode eliminasi Gauss.

- Dengan cara yang sama kita dapat membuat polinom interpolasi berderajat n untuk n yang lebih tinggi:

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

asalkan tersedia $(n+1)$ buah titik data.

- Dengan menyulihkan (x_i, y_i) ke dalam persamaan polinom di atas $y = p_n(x)$ untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n$, akan diperoleh n buah sistem persamaan linier dalam $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$,

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0$$

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1$$

$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_2^n = y_2$$

...

$$a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n$$

- Solusi sistem persamaan linier ini diperoleh dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang sudah anda pelajari.