Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama :…………………………
NIM :…………………………
T.tangan:…………………………

Solusi Kuis ke-2 IF2123 Aljabar Geometri (3 SKS) – Materi: Aljabar Vektor
Dosen: Rinaldi Munir, Judhi Santoso
Jumat, 9 Oktober 2015
Waktu: 75 menit

1. Diberikan himpunan $S = \{(1, 1, 0), (-5, 1, 3), (a, -1, a)\}$. Tentukan semua nilai a agar S tak-bebas lanjar (*linearly dependent*).

Penyelesaian:

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}-5\\1\\3\end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix}a\\-1\\a\end{pmatrix}$$

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -5 & a\\1 & 1 & -1\\0 & 3 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix} = 0$$

Tidak semua k_1, k_2, k_3 bernilai nol (jawab tak trivial)

$$det\begin{pmatrix}1 & -5 & a\\1 & 1 & -1\\0 & 3 & a\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3\begin{vmatrix}1 & a\\1 & -1\end{vmatrix} + a\begin{vmatrix}1 & -5\\1 & 1\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = -{}^{1}/_{3}$$

2. Diketahui **u** = (1, -3, 4) dan **v** = (3, 4, 7). Tentukan:
   a. cos θ dimana θ adalah sudut antara **u** dan **v**.
   b. proyeksi **u** pada **v**.
   c. jarak antara **u** dan **v**.

Penyelesaian:

u.v = 3-12+28 = 19

$||u||^2$ = 1+9+16 = 26

$||v||^2$ = 9+16+49 = 74

a. $cos\ \theta = \frac{u.v}{\|u\|\ \|v\|} = \frac{19}{\sqrt{26}\sqrt{74}}$

b. proj(u,v) = $\frac{u.v}{\|v\|^2}.v = \frac{19}{74}(3, 4, 7)$

c. d(u,v) = $\|u - v\| = \|(-2, -7, -4)\| = \sqrt{62}$

3. Diketahui **u** = (1, -3, 5), **v** = (1, -8, -2), **w** = (0, 2, -8). Tentukan nilai dari ekspresi berikut :
   a. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$
   b. $\|-3\mathbf{u}\| - 3\|\mathbf{u}\|$
   c. $\frac{2}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{u}$

Penyelesaian:

a. u + v = (2, -11, 3). Maka, ||u + v|| = $\sqrt{2^2+(-11)^2+3^2}$ = $\sqrt{134}$

b. -3u = (-3, 9, -15). ||-3u|| = $\sqrt{(-3)^2+9^2+(-15)^2}$ = $\sqrt{315}$ = 3 $\sqrt{35}$

u = (1, -3, 5). ||u|| = $\sqrt{1^2+(-3)^2+5^2}$ = $\sqrt{35}$. 3||u|| = 3 $\sqrt{35}$

Maka, ||-3u|| - 3||u|| = 3 $\sqrt{35}$ - 3 $\sqrt{35}$ = 0.

c. ||w|| = $\sqrt{0^2+2^2+(-8)^2}$ = $\sqrt{68}$ = 2 $\sqrt{17}$

$\frac{2}{\|w\|}u$ = $\frac{2}{2\sqrt{17}}(1,\ -3,\ 5)$ = $\frac{1}{17}\sqrt{17}$ (1, -3, 5).

4. Apakah vektor-vektor berikut: (2, -1, 3), (4, 1, 2), (8, -1, 8) merentang R^3. Tunjukkan jawabanmu!

Penyelesaian: Misalkan **u** = (2, -1, 3), **v** = (4, 1, 2), **w** = (8, -1, 8). Jika **u**, **v**, dan **w** merentang R^3, maka semua vektor di R^3 dapat dinyatakan sebagai kombinasi lanjar dari **u**, **v**, dan **w**. Misalkan **x** = (x_1, x_2, x_3) adalah sembarang vektor di R^3, maka

$$\mathbf{x} = k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v} + k_3\mathbf{w}$$

Diperoleh SPL dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Agar SPL tersebut konsisten untuk semua x_1, x_2, dan x_3, maka seharusnya determinan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

tidak sama dengan 0 agar A mempunyai balikan.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\,((1)(8) - (2)(-1)) - 4((-1)(8) - (3)(-1)) + 8\,((-1)(2) - (1)(3))$$

$$= 2(8 + 2) - 4\,(-8 + 3) + 8(-2 - 3)$$
$$= 20 + 20 - 40$$
$$= 0$$

Karena det(A) = 0, maka A tidak mempunayi balikan, dan sebagai konsekuensinya **u** = (2, -1, 3), **v** = (4, 1, 2), **w** = (8, -1, 8) **TIDAK** merentang R^3.

5. Tunjukan bahwa T : $R^2 \rightarrow R^3$ yang didefinisikan oleh persamaan berikut merupakan transformasi lanjar

$$T\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x-y \\ -x \\ y \end{pmatrix}$$

Penyelesaian:

i. Misalnya ambil sembarang :

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \ \bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in R^2$$

Sehingga berlaku :

$$\begin{aligned}
T(\bar{u}+\bar{v}) &= T\left[\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} (u_1+v_1)-(u_2+v_2) \\ -(u_1+v_1) \\ u_2+v_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (u_1+v_1)-(u_2+v_2) \\ -u_1-v_1 \\ u_2+v_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_1-u_2 \\ -u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1-v_2 \\ -v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{T}(\bar{u}) + \mathrm{T}(\bar{v})
\end{aligned}$$

Jadi *T(u+v)* ε R^3

ii. Ambil sembarang kedua persamaan :

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in R^2 \quad \text{dan } \alpha \in R$$

Berlaku

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}(\alpha\bar{u}) &= \mathrm{T}\left[\begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} \alpha u_1 - \alpha u_2 \\ -\alpha u_1 \\ \alpha u_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(u_1-u_2) \\ \alpha(-u_1) \\ \alpha(u_2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ -u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \mathrm{T}(\overline{u})$$

Jadi $T(\alpha u)$ ε R^3. Dengan demikian terbukti bahwa T merupakan transformasi linier

6. Temukan matriks yang berkoresponden dengan transformasi T : $R^2 \to R^3$ jika diberikan

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

<u>Penyelesaian</u>:

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Maka, matriks standard untuk tarnsformasi di atas adalah: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$