

Penerapan Bilangan Kompleks pada Analisis Rangkaian Arus Bolak Balik

KRISTIANTO KARIM - 13514075

Program Studi Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

13514075@std.stei.itb.ac.id

Abstrak-Makalah ini mengulas bagaimana mempermudah analisis rangkaian dengan arus bolak – balik. Rangkaian arus bolak-balik sebenarnya harus dianalisis dengan persamaan diferensial orde dua. Tetapi dengan adanya bilangan kompleks maka analisis menjadi mudah yaitu analisis aljabar biasa.

Kata Kunci—Bilangan kompleks, imajiner, riil, fasor, analisis arus bolak -balik, resistor, induktor, tegangan, kapasitor.

I. LATAR BELAKANG

Arus bolak – balik mengalami perubahan muatan setiap waktunya yang menyebabkan perubahan polaritas dan fase pada sumber arus. Perubahan polaritas ini menyebabkan kapasitor dan induktor seolah-olah menghabiskan energi yang sebenarnya adalah disimpan. Kapasitor menyimpan energi listrik menjadi energi muatan sedangkan induktor menyimpan energi listrik sebagai energi magnet.

Analisis rangkaian arus bolak – balik adalah analisis mengenai energi yang digunakan oleh setiap komponen. Tetapi dikarenakan ada energi yang seolah – olah hilang oleh kapasitor dan induktor, maka akan sangat sulit menganalisisnya dengan aljabar biasa karena kita akan menghitungnya dengan persamaan diferensial orde dua. Sehingga, digunakanlah bilangan kompleks untuk menganalisis rangkaian arus bolak – balik karena bilangan kompleks terdiri dari dua bagian yaitu bagian riil dan bagian imajiner. Dua bagian tersebut dapat merepresentasikan besarnya dan fase arus bolak – balik.

II. DASAR TEORI

A. Bilangan Riil

Bilangan riil dalam matematika adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk decimal (contohnya : 3.234234235234).

Bilangan riil terdiri :

1. Bilangan rasional (contohnya : 42, - 23, 1/25)
2. Bilangan irrasional (contohnya : π , e, $\sqrt{2}$)

B. Bilangan Imajiner

Bilangan imajiner adalah bilangan yang memiliki sifat $i^2 = -$

1.

C. Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks adalah bilangan yang terdiri dari bagian riil dan bagian imajiner. Biasanya dituliskan dalam bentuk penjumlahan

$$a + bi$$

Operasi pada bilangan kompleks yaitu :

1. Penjumlahan

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Contoh :

$$(2 + 3i) + (4 + 5i) = 6 + 8i$$

2. Pengurangan

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Contoh :

$$(2 + 3i) - (4 + 5i) = -4 - 2i$$

3. Perkalian

$$(a + bi) * (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

Contoh :

$$(2 + 3i) * (4 + 5i) = -7 + 22i$$

4. Pembagian

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}$$

Contoh :

$$\frac{2 + 3i}{4 + 5i} = \frac{(2 + 3i)(4 - 5i)}{4^2 + 5^2} = \frac{23 + 2i}{41}$$

Selain dinyatakan dalam bentuk penjumlahan, bilangan kompleks juga dapat dinyatakan dalam bentuk polar dan bentuk eksponen.

1. Bentuk polar

Misalkan $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ dan $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$ dimana a adalah bagian riil dari bilangan kompleks dan b adalah bagian imajiner, maka bentuk polarnya adalah

$$a + bi = r \cos \theta + i r \sin \theta$$

2. Bentuk eksponen

Bentuk eksponen adalah bentuk lain dari bilangan kompleks yang sesuai dengan persamaan euler.

Persamaan euler yaitu

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Sehingga persamaan

$$a + bi = r \cos \theta + i r \sin \theta$$

Menjadi

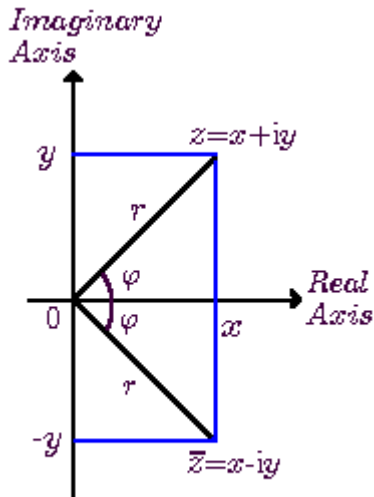
$$a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Kemudian substitusikan persamaan euler sehingga

$$a + bi = re^{i\theta}$$

Dimana $re^{i\theta}$ adalah bentuk eksponen dari bilangan kompleks.

Bilangan kompleks dapat kita visualisasikan sebagai vektor pada bidang koordinat dua dimensi dengan sumbu y merepresentasikan bagian imajiner dan sumbu x merepresentasikan bagian riil.



Sumber :

<https://id.wikipedia.org/wiki/Berkas:Complex.png>

D. Arus Bolak - Balik

Arus bolak – balik adalah arus listrik yang dimana besar dan arahnya berubah secara bolak – balik. Biasanya arus bolak – balik direpresentasikan dalam bentuk grafik sinusoidal, sehingga biasanya penulisan tegangan dari arus bolak – balik adalah

$$v(t) = v_{max}\sin\omega t$$

Dimana v_{max} adalah tegangan maksimum, ω adalah frekuensi sudut (biasanya diketahui frekuensi) dan t adalah waktu yang berubah terus – menerus.

Untuk menghitung v_{rms} dari tegangan sinusoidal yaitu dengan

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int [v_{max}\sin(\omega t + \phi)]^2 dt}$$

$$v_{rms} = \frac{v_{max}}{\sqrt{2}}$$

E. Fasor (Fase Vektor)

Fasor adalah bentuk kompleks yang telah disederhanakan karena adanya suatu faktor yang mengandung informasi yang tetap dan tidak terlalu berpengaruh pada hitungan.

Fasor digunakan oleh ahli elektronik untuk menganalisis arus sinusoidal agar persamaan diferensial dapat diubah menjadi aljabar.

Jadi misalkan

$$v(t) = v_{max}\cos(\omega t + \phi)$$

Dan

$$I(t) = I_{max}\cos(\omega t + \theta),$$

Menjadi

$$v(t) = \Re(vV_m e^{i(\omega t + \phi)})$$

Dan

$$I(t) = \Re(I_{max} e^{i(\omega t + \theta)})$$

Kemudian kita tarik keluar faktor $e^{i\omega t}$

$$\Re(v_{max} e^{i\phi}) = V = v_{max} \angle \phi$$

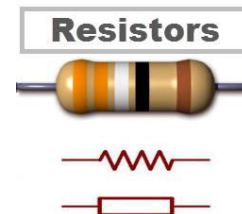
Dan

$$\Re(I_{max} e^{i\theta}) = I = I_{max} \angle \theta$$

Karena yang berpengaruh hanya fasenya jadi sudut ωt tidak dituliskan lagi. Bentuk diatas adalah bentuk fasor.

F. Resistor

Resistor adalah komponen elektrik yang berfungsi memberikan hambatan suatu rangkaian, biasanya digunakan untuk mengatur tegangan listrik berdasarkan arus yang mengalir. Karakteristik utama dari resistor adalah resistansi dan daya listrik yang dapat di hantarkan. Selain itu, karakteristik lain yang termasuk adalah koefisien suhu, derau listrik, dan induktansi.



Sumber :

https://www.google.co.id/imgres?imgurl=http://www.itechsoul.com/wp-content/uploads/2012/06/Resistor.png&imgrefurl=http://www.itechsoul.com/find-value-of-unknown-resistor-with-resistor-color-code-calculator&h=250&w=250&tbid=BjW6qO_gr-r9IM:&docid=vWhvHPtHlx-_LM&ei=Nd9uVpz4EI7-ugTz14HYDg&tbm=isch&ved=0ahUKEwjc5oqr1NvJAhUOv44KHfNrAOsQMwhOKBQwFA

Tegangan antara dua ujung dihitung dengan rumus :

$$v = IR$$

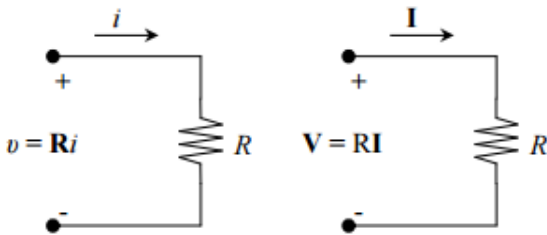
Dalam fasor maka menjadi

$$v(t) = RI(t)$$

$$\Re(v_{max} e^{i(\omega t + \phi)}) = \Re(RI_{max} e^{i(\omega t + \theta)})$$

Kita bandingkan bagian di dalam kurung Re maka

$$\begin{aligned} V_{max} e^{i(\omega t + \phi)} &= R I_{max} e^{i(\omega t + \theta)} \\ V_{max} e^{i\phi} &= R I_{max} e^{i\theta} \\ V &= RI \end{aligned}$$



Sumber :

https://www.google.co.id/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwi_lfivx9vJAhVDkY4KHU1aDpAQFggjMAE&url=http%3A%2F%2Fkk.mercubuana.ac.id%2Flearning%2Ffiles_modul%2F10199-10-593579686854.pdf&usg=AFQjCNEEQ88R5UYO9Y2KECooREbIELioVQ&sig2=319Zfu-gHSjpD3nXUFVLvQ&bvm=bv.109910813.d.c2E halaman 10.

G. Kapasitor

Kapasitor adalah suatu komponen elektrik yang menyimpan energi dalam bentuk medan listrik. Biasanya berbentuk dua lempengan yang berhadapan atau tabung.

Untuk menghitung kapasitansi dari suatu kapasitor dapat digunakan rumus

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d}$$

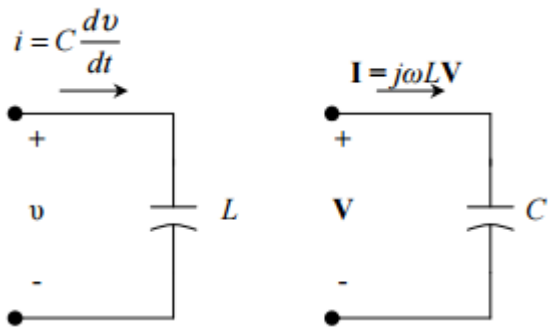
Dimana ϵ_0 adalah permitivitas hampa ϵ_r adalah permitivitas relatif dan A adalah luas lempengan serta d adalah jarak antar dua lempengan.

Arus pada kapasitor dapat dihitung dengan rumus :

$$I_c(t) = C \frac{dv_c}{dt}$$

Dalam fasor maka menjadi

$$\begin{aligned} I_c(t) &= C \frac{dv_c}{dt} \\ \Re(I_{max} e^{i(\omega t + \theta)}) &= \Re\left(C \frac{d(v_{max} e^{i(\omega t + \phi)})}{dt}\right) \\ I_{max} e^{i(\omega t + \theta)} &= iC\omega v_{max} e^{i(\omega t + \phi)} \\ I &= \omega C V i \end{aligned}$$



Sumber :

https://www.google.co.id/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwi_lfivx9vJAhVDkY4KHU1aDpAQFggjMAE&url=http%3A%2F%2Fkk.mercubuana.ac.id%2Flearning%2Ffiles_modul%2F10199-10-593579686854.pdf&usg=AFQjCNEEQ88R5UYO9Y2KECooREbIELioVQ&sig2=319Zfu-gHSjpD3nXUFVLvQ&bvm=bv.109910813.d.c2E halaman 12.

H. Induktor

Induktor adalah suatu komponen listrik yang jika dipasangkan pada arus bolak – balik akan berfungsi sebagai penyimpan energi dalam bentuk medan magnet. Biasanya sebuah induktor adalah kawat penghantar yang dibentuk menjadi kumparan silinder.

Induktansi kumparan silinder dapat dihitung dengan :

$$L = \frac{\mu_0 K N^2 \pi r^2}{l}$$

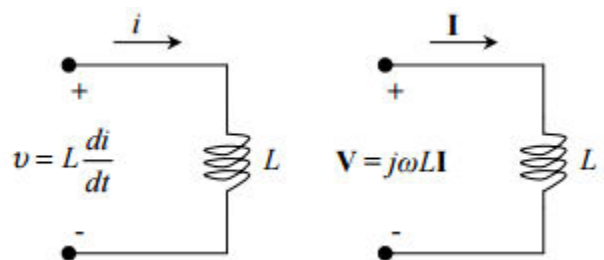
Dengan μ_0 adalah permeabilitas vakum, K adalah koefisien Nagaoka, N adalah jumlah lilitan kumparan , r adalah jari – jari kumparan dan l adalah panjang kumparan atau lilitan.

Tegangan pada induktor dapat dihitung melalui rumus :

$$v_L(t) = L \frac{dI_L}{dt}$$

Dalam fasor maka menjadi

$$\begin{aligned} \Re(v_{max} e^{i(\omega t + \phi)}) &= \Re\left(L \frac{d(I_{max} e^{i(\omega t + \theta)})}{dt}\right) \\ v_{max} e^{i(\omega t + \phi)} &= Li\omega I_{max} e^{i(\omega t + \theta)} \\ v_{max} e^{i\phi} &= Li\omega I_{max} e^{i\theta} \\ V &= \omega L I i \end{aligned}$$



Sumber :

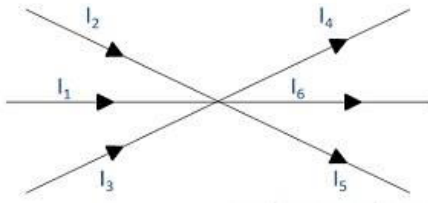
https://www.google.co.id/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwi_lfivx9vJAhVDkY4KHU1aDpAQFggjMAE&url=http%3A%2F%2Fkk.mercubuana.ac.id%2Flearning%2Ffiles_modul%2F10199-10-593579686854.pdf&usg=AFQjCNEEQ88R5UYO9Y2KECooREbIELioVQ&sig2=319Zfu-gHSjpD3nXUFVLvQ&bvm=bv.109910813.d.c2E

[hVDkY4KHU1aDpAQFggjMAE&url=http%3A%2F%2Fkk.mercubuana.ac.id%2Flearning%2Ffiles_modul%2F10199-10-593579686854.pdf&usg=AFQjCNEEQ88R5UYQ9Y2KECooREbIELioVQ&sig2=319Zfu-gHSjpD3nXUFVLvQ&bvm=bv.109910813.d.c2E](http://www.ercubuana.ac.id/2Felearning/2Ffiles_modul%2F10199-10-593579686854.pdf&usg=AFQjCNEEQ88R5UYQ9Y2KECooREbIELioVQ&sig2=319Zfu-gHSjpD3nXUFVLvQ&bvm=bv.109910813.d.c2E) halaman 11

I. Hukum I Kirchoff

Jumlah kuat arus yang masuk dalam titik percabangan sama dengan jumlah kuat arus yang keluar dari titik percabangan.

$$i_{masuk} = \sum i_{keluar}$$



Sumber :

https://www.google.co.id/imgres?imgurl=http://teknikelektronika.com/wp-content/uploads/2014/10/Hukum-Kirchhoff-1.jpg&imgrefurl=http://teknikelektronika.com/pengertian-bunyi-hukum-kirchhoff-1-2/&h=156&w=300&tbid=9Q_ZHte2GViiM:&docid=Qz_18Wa6sZ1g6M&ei=cOBuVsOUAcHiuQS22aK4Cw&tbn=isch

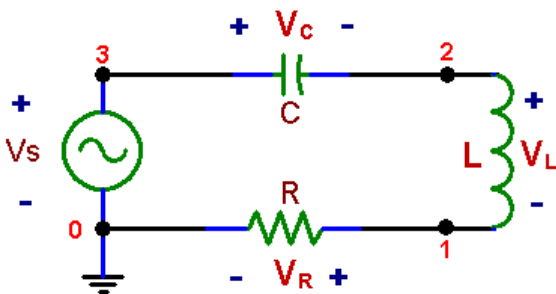
J. Hukum II Kirchoff

Dalam rangkaian tertutup, jumlah GGL sumber arus dengan penurunan tegangan adalah nol

$$\sum \varepsilon + \sum IR = 0$$

III. PENJELASAN DAN PEMBAHASAN

Misalkan ada sebuah rangkaian arus bolak – balik seperti pada gambar :



Sumber :

<https://www.google.co.id/imgres?imgurl=http://4.bp.blogspot.com/-RFDkc74h1Tw/T95il5rMP6I/AAAAAAAAAIQ/6rmf5Th5Irc/s320/Rangkaian-RLC.jpg&imgrefurl=http://palleko.blogspot.com/2012/07/rangkaian-rlc.html&h=193&w=320&tbid=pqR1FJwEipXEIM:&docid=OtQKEX28BnBKCM&ei=idJuVun2NsG3uATM-K3YBw&tbn=isch&ved=0ahUKEwip38KgyNvJAhXBG44KHUx8C3sQMwglKAswCw>

Dengan Hukum I Kirchoff kita mengetahui bahwa arus yang melewati setiap komponen listrik dalam rangkaian di atas adalah sama. Sehingga

$$I_c = I_L = I_R = I$$

Jika kita analisis dengan Hukum II kirchoff maka akan menghasilkan persamaan :

$$\sum v_{rangakaian} = 0$$

Sehingga

$$v_s + v_L + v_R + v_c = 0$$

Dan

$$v_c = C \int I_c(t) dt$$

Sehingga jika kita sulihkan v_c dan v_L maka akan didapatkan

$$v_{max} \cos(\omega t + \theta) + L \frac{dI}{dt} + IR + C \int I dt = 0$$

Kemudian kita turunkan sekali terhadap t sehingga

$$-v_{max} \omega \sin(\omega t + \theta) + L \frac{d^2 I}{(dt)^2} + R \frac{dI}{dt} + CI = 0$$

$$\frac{d^2 I}{(dt)^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{C}{L} I = v_{max} \omega \sin(\omega t + \theta)$$

Persamaan difrensial orde dua di atas jika diselesaikan dengan metode biasa maka akan sangat sulit dan merepotkan. Oleh karena itu, digunakanlah bilangan kompleks untuk menyelesaikannya.

Berikut cara menganalisisnya dengan metode fasor

$$v_s + v_L + v_R + v_c = 0$$

Sulihkan tegangan dalam bentuk fasor

$$v_s + v_L + v_R + v_c = 0$$

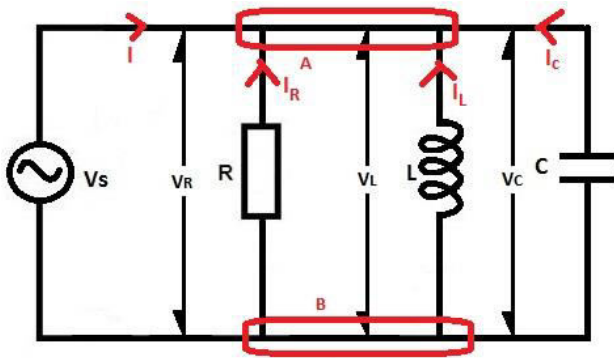
$$v_s + \omega L I + IR + \frac{I}{i\omega C} = 0$$

$$v_s + \omega L I + IR - \frac{I\omega C i}{\omega^2 C^2} = 0$$

Persamaan di atas telah dalam bentuk fasor dan dapat dianalisis secara aljabar, tidak perlu menggunakan persamaan difrensial orde dua yang sangat rumit.

Selain menggunakan analisis tegangan seperti yang di atas, kita juga dapat menggunakan analisis simpul yang menggunakan Hukum I Kirchoff.

Misalnya ada sebuah rangkaian arus bolak – balik seperti pada gambar :



Sumber :

https://www.google.co.id/search?q=Rangkaian+paralel+R+L+C&biw=1517&bih=714&tbm=isch&imgil=TgD4ChT8zm5tmM%253A%253BZnCbKpkPIBTiFJM%253Bhttps%25253A%25252F%25252Fnrux.wordpress.com%25252F2011%25252F07%25252F07%25252Frangkai-an-ac-paralel-r-l-c%25252F&source=iu&pf=m&fir=TgD4ChT8zm5tmM%253A%25252FZnCbKpkPIBTiFJM%25252C_&usg=__UDsaCR0ypwoh8q00v_yexzoAzaw%3D

Kita mengetahui bahwa :

$$V_L = V_R = V_C = V_s$$

Dengan menerapkan Hukum 1 kirchoff kita lakukan analisis simpul A sehingga

$$i_{masuk} = \sum i_{keluar}$$

$$I = I_R + I_L + I_C$$

Kemudian kita sulihkan arus dalam bentuk fasor sehingga

$$I = \frac{V}{R} - \frac{V\omega L}{\omega^2 L^2} + \omega CVi$$

Bentuk diatas juga telah sederhana dan dapat diselesaikan dengan metode aljabar biasa sehingga lebih mudah tanpa harus menggunakan persamaan diffrensial orde dua.

IV. KESIMPULAN

Jadi, bilangan kompleks sangat bermanfaat dalam berbagai aspek dan bidang. Salah satunya dalam bidang elektronika seperti yang telah dibahas di atas.

Pada bidang elektronika bilangan kompleks digunakan untuk mempermudah analisis pada rangkaian arus bolak – balik yaitu dari operasi untuk persamaan orde dua yang rumit menjadi operasi aljabar biasa.

V. DAFTAR PUSTAKA

- [1] http://kk.mercubuana.ac.id/elearning/files_modul/10199-10-593579686854.pdf
- [2] Sadiku, Matthew N.O., “Fundamentals of Electric Circuits Fourth Edition”. 2008
- [3] <https://nrux.wordpress.com/2011/07/07/rangkaian-ac-paralel-r-l-c/>
- [4] <http://fisikazone.com/rangkaian-seri-rlc-pada-arus-bolak-balik/>

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 27 November 2013

Nama dan NIM