

# Penyelesaian Teka-Teki Matematika Persegi Ajaib Menggunakan Aljabar Lanjar

Gaudensius Dimas Prasetyo Suprpto / 13514059  
Program Studi Informatika  
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika  
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia  
13514059@std.stei.itb.ac.id

**Abstrak** — Persegi Ajaib adalah sebuah teka-teki (*puzzle*) matematis di mana si penjawab teka-teki harus mengisi kotak  $N \times N$  dengan angka yang berbeda, di mana jumlah dari setiap baris, kolom, maupun diagonalnya bernilai sama.

**Kata Kunci**—Persegi ajaib, teka-teki, sistem persamaan lanjar.

## I. PENDAHULUAN

Teka-teki adalah suatu persoalan kreatif yang biasanya dibuat dengan tujuan untuk menguji kecerdasan seseorang. Teka-teki ini biasanya dibuat sulit untuk mendapatkan jawabannya secara langsung. Karena sifatnya itu, teka-teki dapat bertahan ratusan hingga ribuan tahun.

Contoh teka-teki yang terkenal dan dapat bertahan ribuan tahun adalah suatu teka-teki yang berasal dari mitologi Mesir, yang tidak lain adalah teka-teki Sphinx. Pada mitologi tersebut, diceritakan bahwa ada seekor binatang mistis bertubuh singa, bersayap elang, dan berkepala manusia yang bernama Sphinx. Sphinx akan memberikan teka-teki pada setiap pengembara yang berpapasan dengannya. Teka-teki tersebut berbunyi:

“Makhluk apa yang lahir dengan empat kaki, hidup dengan dua kaki, dan meninggal dengan tiga kaki?”

Pengembara yang tidak dapat menjawab teka-teki tersebut dengan benar akan dimakan oleh Sphinx. Layak untuk diketahui bahwa jawaban dari teka-teki tersebut adalah manusia, yang lahir sebagai bayi yang merangkak (empat kaki), hidup sebagai orang biasa yang memiliki dua kaki, dan meninggal sebagai orang tua yang sering digambarkan sebagai kakek atau nenek bertongkat (tiga kaki).

Contoh di atas merupakan contoh dari teka-teki yang bersifat logika. Masih banyak contoh teka-teki logika lain seperti teka-teki menyeberangkan domba, serigala dan rumput. Namun yang akan dibahas di sini adalah suatu teka-teki matematis, yaitu teka-teki di mana untuk mendapatkan penyelesaiannya, dibutuhkan pendekatan secara matematis. Tidak jarang pula cara penyelesaian dari teka-teki matematis ini diabadikan untuk menyelesaikan persoalan-persoalan yang ada pada

kehidupan sehari-hari, sebagai contoh, *Chinese Remainder Problem*, *Travelling Salesperson Problem*, dan lain-lain. Yang akan dibahas di sini adalah cara menyelesaikan teka-teki Persegi Ajaib dengan menggunakan aljabar lanjar, yaitu dengan cara menyelesaikan sistem persamaan lanjar.

## II. TEORI DASAR

Sebelum kita beranjak untuk membahas penyelesaian teka-teki Persegi Ajaib, ada baiknya kita terlebih dahulu mempelajari teori-teori dasar yang dibutuhkan untuk menyelesaikan teka-teki tersebut

### A. Sistem Persamaan Lanjar

Sesuai dengan buku *Elementary Linear Algebra* edisi ke-10<sup>[1]</sup>, terdapat berbagai macam persamaan lanjar. Sebagai contoh, pada ruang dua dimensi, garis pada suatu koordinat  $(x, y)$  dapat ditulis sebagai suatu persamaan:

$$ax + by = c, \text{ di mana } a \text{ dan } b \neq 0 \quad (1)$$

Sedangkan pada ruang tiga dimensi, bidang pada suatu koordinat  $(x, y, z)$  dapat ditulis:

$$ax + by + cz = d, \text{ di mana } a, b, \text{ dan } c \neq 0 \quad (2)$$

Sehingga dapat kita simpulkan secara umum bahwa suatu persamaan lanjar akan selalu berbentuk sebagai berikut:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (3)$$

Dalam hal ini, persamaan lanjar tersebut disebut **homogen** dari  $x_1$  hingga  $x_n$  jika nilai dari  $b$  adalah 0. Perlu diperhatikan bahwa suatu persamaan lanjar berbentuk persamaan orde 1 yang tidak boleh mengandung segala bentuk perpangkatan, trigonometri, logaritma, dan eksponensial.



Sedangkan syarat-syarat dari matriks ekselon yang tereduksi adalah sebagai berikut:

1. Setiap baris dimulai dengan kumpulan 0 sebanyak  $n$ , dengan  $n \geq 0$ , yang diikuti dengan satu elemen bernilai 1 (yang disebut dengan *leading 1*), lalu diikuti dengan elemen lain bernilai bebas sebanyak  $m$  ( $m \geq 0$ ), atau, berisi elemen dengan nilai 0 seluruhnya.
2. Baris terurut dari atas ke bawah menurut kemunculan *leading 1* paling awal secara kolom (dari kiri).
3. Jika baris tersebut berisi elemen-elemen dengan nilai 0 seluruhnya, letakkan baris tersebut di baris paling terakhir dari matriks.
4. Setiap kolom yang mengandung *leading 1* seluruh elemennya bernilai 0, kecuali *leading 1* itu sendiri

Dapat dilihat bahwa syarat 1 sampai 3 dari matriks ekselon tereduksi sama persis dengan syarat-syarat pada matriks ekselon, yang menandakan bahwa matriks ekselon tereduksi memang didapat dari matriks ekselon. Penyelesaian suatu sistem persamaan linier dengan menggunakan matriks ekselon dikenal dengan nama Eliminasi Gauss, sedangkan jika matriks ekselon tersebut direduksi menjadi matriks ekselon tereduksi, penyelesaian tersebut disebut dengan Eliminasi Gauss – Jordan.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Gambar 2 Contoh Matriks Ekselon Tereduksi

Suatu sistem persamaan linier dengan matriks ekselon tertentu tersebut dikatakan:

1. **Mempunyai solusi khusus,** ketika setiap variabel mempunyai suatu nilai tertentu dan tidak terikat oleh parameter lain. Matriks ekselon pada gambar 1(b) menunjukkan sistem persamaan linier yang mempunyai solusi khusus.
2. **Mempunyai solusi banyak,** ketika ada variabel yang terikat pada suatu persamaan parameter, atau, variabel tersebut bernilai bebas (dapat diisi dengan nilai berapa pun). Contohnya adalah matriks ekselon pada gambar 1(c).

### 3. Tidak punya solusi,

ketika ada persamaan linier yang memiliki kontradiksi. Lihat matriks ekselon pada gambar 1(a). Matriks tersebut merupakan sebuah representasi sistem persamaan linier yang tidak punya solusi karena memiliki kontradiksi pada baris terakhir yang merepresentasikan persamaan  $0 = 1$ .

### B. Teka - Teki Persegi Ajaib (lihat ref. [2])

Teka-teki ini berupa kotak  $3 \times 3$ , di mana setiap kotak harus diisi dengan angka satu digit kecuali 0 yang berbeda-beda. Setiap baris, kolom, maupun diagonalnya harus menghasilkan jumlah yang sama.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Gambar 3 Contoh Persegi Ajaib

Teka-teki tersebut jelas mempunyai solusi yang banyak.

### III. PENYELESAIAN PERSEGI AJAIB

Untuk mencari solusi, kita isi masing-masing jawaban dengan suatu variabel, anggaplah itu  $a$  hingga  $i$ , sehingga bentuk persegi ajaib menjadi sebagai berikut:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Gambar 3 Persegi Ajaib Diisi dengan Variabel

Variabel-variabel tersebut adalah nilai yang dicari dalam teka-teki ini. Namun, itu saja tidak cukup. Kita memerlukan jumlah tiap baris, kolom, atau diagonal yang akan terbentuk. Jumlah tersebut dapat dihitung dengan cara mencari rata-rata dari jumlah maksimum dan jumlah minimum yang dapat terbentuk dari nilai-nilai yang memungkinkan dari persegi ajaib tersebut. Jumlah minimum yang mungkin adalah 6 (dari  $1+2+3$ ), sedangkan jumlah maksimum yang mungkin adalah 24 (dari  $7+8+9$ ), sehingga kita mendapatkan bahwa jumlah tiap baris, kolom, atau diagonalnya adalah  $\text{avg}(6, 24)$  yaitu 15.

Setelah kita mendapatkan jumlah dari persegi ajaib tersebut, maka kita dapat membentuk sistem persamaan linier yang merepresentasikan teka-teki tersebut. Sistem persamaan linier tersebut akan berbentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
a + b + c &= 15 \\
d + e + f &= 15 \\
g + h + i &= 15 \\
a + d + g &= 15 \\
b + e + h &= 15 \\
c + f + i &= 15 \\
a + e + i &= 15 \\
c + e + g &= 15
\end{aligned}$$

(7)

Sistem persamaan linier tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks teraugmentasi sebagai berikut:

$$\left[ \begin{array}{cccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 15 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 15 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 15 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 15
\end{array} \right]$$

(8)

Dengan melakukan Operasi Baris Elementer sedemikian rupa akan didapatkan matriks ekselon tereduksi sebagai berikut:

$$\left[ \begin{array}{cccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -10 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 20 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 15 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right]$$

(9)

Yang dapat kita tulis dalam bentuk persamaan linier sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
a + i &= 10 \\
b + h &= 10 \\
c - h - i &= -5 \\
d - h - 2i &= -10 \\
e &= 5 \\
f + h + 2i &= 20 \\
g + h + i &= 15
\end{aligned}$$

(10)

Dengan melihat persamaan-persamaan linier di atas, kita dapat menyimpulkan bahwa solusi dari teka-teki ini banyak. Namun dapat kita lihat pula bahwa variabel  $h$  dan  $i$  bernilai bebas karena tidak ada *leading 1* pada matriks ekselon tereduksi tersebut hanya sampai pada variabel  $g$  sehingga kita dapat menentukan nilai  $h$  dan  $i$ . Namun, nilai  $h$  dan  $i$  tidak boleh sembarang, karena baris ke-3,

yang mengandung variabel  $h$  dan  $i$  pun harus diisi dengan mengikuti peraturan yang ada. Contoh nilai yang tidak dibolehkan adalah  $h = 7$  dan  $i = 4$ , karena dengan begitu,  $g$  harus diisi dengan 4, di mana hal tersebut melanggar aturan bahwa Persegi Ajaib harus diisi dengan nilai dengan 1 digit yang berbeda-beda. Perlu diperhatikan pula bahwa nilai  $i$  dan  $h$  tidak boleh 5 dikarenakan nilai 5 sudah diambil oleh variabel  $e$  pada sistem persamaan linier (10).

Kita tentukan:

$$\begin{aligned}
h &= 1 \\
i &= 8
\end{aligned}$$

Sehingga  $g$  akan memberikan nilai yang valid. Dengan mensubstitusikan nilai di atas ke sistem persamaan linier (10), didapat:

$$\begin{aligned}
a &= 10 - 8 = 2 \\
b &= 10 - 1 = 9 \\
c &= -5 + 1 + 8 = 4 \\
d &= -10 + 1 + 16 = 7 \\
e &= 5 \\
f &= 20 - 1 - 16 = 3 \\
g &= 15 - 1 - 8 = 6 \\
h &= 1 \\
i &= 8
\end{aligned}$$

(11)

Di mana nilai-nilai  $a$  hingga  $g$  pada persamaan (11) sudah merupakan salah satu solusi dari teka-teki Persegi Ajaib, yang ditulis sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccc}
2 & 9 & 4 \\
7 & 5 & 3 \\
6 & 1 & 8
\end{array}$$

Solusi yang berbeda bisa didapat dengan cara mengganti nilai dari  $h$  dan  $i$ , jika kita tentukan:

$$\begin{aligned}
h &= 7 \\
i &= 6
\end{aligned}$$

Maka didapat:

$$\begin{aligned}
a &= 10 - 6 = 4 \\
b &= 10 - 7 = 3 \\
c &= -5 + 7 + 6 = 8 \\
d &= -10 + 7 + 12 = 9 \\
e &= 5 \\
f &= 20 - 7 - 12 = 1 \\
g &= 15 - 7 - 6 = 2 \\
h &= 7 \\
i &= 6
\end{aligned}$$

Sehingga solusi dapat ditulis:

$$\begin{array}{ccc}
4 & 3 & 8 \\
9 & 5 & 1 \\
2 & 7 & 6
\end{array}$$

Namun, cara penyelesaian dengan eliminasi Gauss – Jordan ini juga mempunyai kekurangan. Pada saat bereksperimen dengan angka lain, ditemukan pula sejenis “bug” di mana  $i$  dan  $h$  valid, tetapi nilai menjadi tidak valid setelah disubstitusikan, yaitu ketika:

$$h = 4$$

$$i = 3$$

Akan menghasilkan:

$$d = -10 + 4 + 6 = 0$$

Padahal jika Persegi Ajaib tersebut seharusnya masih dapat dibuat dengan valid, yaitu:

$$\begin{array}{ccc} 6 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & 4 & 3 \end{array}$$

#### IV. TANDA TERIMA KASIH

Saya sangat berterima kasih kepada Ir. Rinaldi Munir, M.T. dan Dr. Judhi Santoso, M.Sc. selaku dosen Aljabar Geometri – IF2123 karena telah memberikan saya tugas ini dengan tujuan memperkaya wawasan saya dalam bidang aljabar geometri. Tak lupa saya haturkan kepada Tuhan YME karena bimbingannyalah saya dapat menyelesaikan tugas ini.

Saya mengucapkan terima kasih pula terhadap teman, orang tua, saudara, dan semua orang lainnya yang telah memberikan bantuan baik secara langsung maupun tidak langsung untuk menyelesaikan tugas ini.

#### REFERENCES

- [1] Howard Anton, *Elementary Linear Algebra*, 10th edition, John Wiley and Sons, 2010.
- [2] <http://aix1.uottawa.ca/~jkhoury/game.html>, 16:05, 15 Dec 15.

#### PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 16 Desember 2013



Gaudensius Dimas Prasetyo Suprpto / 13514059