Aplikasi Transformasi Linear Dalam Menentukan Perubahan Panjang Bahan Elastis

Cut Meurah Rudi - 13514057
Program Studi Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
cmrudi@students.itb.ac.id

***Abstract*—Transformasi adalah salah satu bidang pada keilmuan matematika yang memiliki banyak sekali aplikasi, dalam makalah ini penulis akan memanfaatkan transformasi linear ini dalam merepresentasikan elastisitas bahan sehingga menggunakan aplikasi transformasi dapat diketahui sejauh mana sebuah bahan dapat melentur (memanjang atau melebar) jika dilakukan penarikan pada ujung-ujung bahan tersebut.**

***Keywords*— transformasi, elastisitas dan hukum young.**

I. PENDAHULUAN

Berbagai peralatan yang ada di kehidupan kita sehari-hari merupakan perlatan yang terdiri dari berbagai macam bahan, tentunya setiap perlatan harus menggunakan bahan yang cocok serta sesuai penggunaannya, contohnya ketika ingin membuat sebuah wajan, tentu harus digunakan bahan yang tahan panas, tetapi beda halnya lagi ketika ingin membuat sebuah termos, dibutuhkan bahan isolator yang tidak dapat menghantarkan panas.

Beberapa contoh lain seperti dalam kontstruksi, ketika ingin membuat jembatan gantung, dibutuhkan tali yang elastisitasnya dapat menahan beban yang mungkin akan dihadapi oleh jembatan tersebut, atau ketika membuat lift, juga dibutuhkan tali yang dapat menahan sejumlah orang, sesuai dengan kapasitas maksimum jumlah orang pada lift tersebut.

Dalam ekonomi juga dikenal elastisitas permintaan dan elastisitas penawaran, elastisitas permintaan adalah besarnya perubahan harga terhadap perubuahan jumlah permintaan di pasar, sedangkan elastisitas penawaran adalah besarnya perubahan harga yang terjadi terhadap perubahan penawaran yang ada di pasar, angka yang menunjukkan besarnya perubahan tersebut disebut koefisien elastisitas.

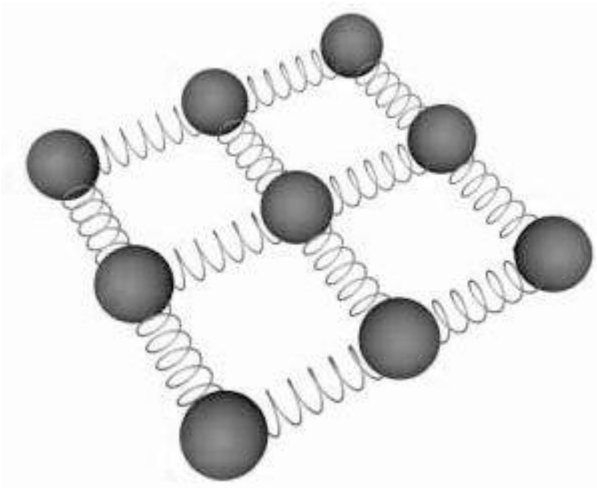
Dalam makalah ini kita akan fokus membahas elastisitas bahan sebab elastisitas bahan sifatnya lebih nyata dan dapat diukur dengan alat ukur, walaupun aplikasi trasnformasi ini juga dapat diaplikasikan pada topic-topik elastisitas yang tidak nyata, seperti elastisitas permintaan dan penawaran.

Pada sebuah bahan, jika ujung bahan tersebut ditarik dengan gaya atau diberikan gaya yang menekan bahan tersebut, maka bahan tersebut akan mengalami perubahan panjang ataupun lebar, dimana tiap titik-titik sudut bahan tersebut (jika bahan tersebut dalam bentuk kotak) akan kita representasikan ke dalam sebuah matriks, yang selanjutnya akan dicari matriks transformasinya yang sesuai dengan perubahan posisi titik-titik sudutnya.

II. TEORI ELASTISITAS DAN TRANSFORMASI

A. Teori Elastisitas

Benda-benda yang ada di sekitar kita pada dasarnya terbentuk dari atom-atom yang saling berikatan dan dalam posisi setimbang dalam kisi-kisi tiga dimensi, susunannya pun sangat rapi, setiap atom berada pada jarak yang teratur dari atom tetangganya, atom-atom tersebut dapat dimodelkan seperti gambar 2.1, dimana ikatan-ikatan atom dilambangkan dengan sebuah pegas, pada benda tegar, ikatan tersebut sangat kuat (konstanta pegasnya sangat besar).

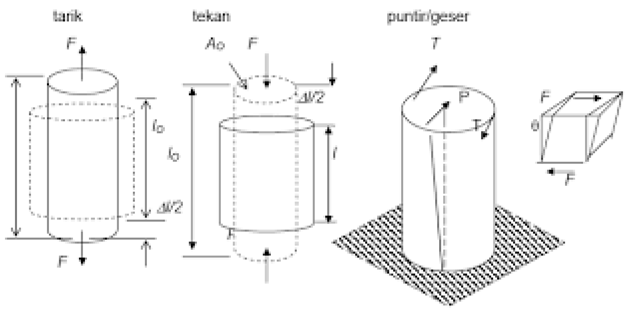


Gambar 2.1 Atom dan ikatannya seperti pegas
Source http://www.bham.ac.uk

Semua benda tegar di dunia sebenarnya juga termasuk benda yang elastis sehingga dapat diubah dimensinya dengan menarik, menekan, memuntir atau memampatkan benda tersebut, hanya saja perubahan dimensinya sangat kecil.

Contohnya baja vertikal yang memiliki panjang 1 m dan diameter 1 cm ditempelkan pada langit-langit pabrik, ketik digantungkan mobil subkompak pada ujung bebas batang tersebut, batang hanya akan bertambah panjang 0,5 mm atau 0,05% dan ketika mobil dilepaskan, batang tersebut akan kembali ke panjang awal.

Jika anda menggantungkan dua buah mobil subkompak pada ujung batang tersebut dan kemudian melepaskan kedua mobil tersebut, maka batang akan bertambah panjang secara permanen dan tidak bisa kembali ke panjang awalnya lagi, namun jika anda menggantungkan tiga buah mobil subkompak sekaligus, maka batang akan patah, sesaat sebelum patah, pemanjangan batang akan kurang dari 0,2 %, meskipun perubahan panjang sangat kecil namun hal ini membuktikan bahwa baja tersebut adalah benda yang elastis dan hal ini akan sangat berpengaruh ketika menentukan bahan sayap pesawat, dimana sayap tersebut harus mampu menanggung bebannya atau tidak.



Gambar 2.2 Tiga Tipe Deformasi
Source http://www.uny.ac.id
v

Terdapat tiga tipe deformasi seperti yang diperlihatkan oleh Gambar 2.2, dari ketiga tipe deformasi tersebut, terdapat kesamaan yaitu bahwa tegangan (*stress*), atau gaya pendeformasi per satuan luas, menghailkan regangan (*strain*) atau satuan deformasi.

Tegangan dan regangan memiliki bentuk yang berbeda-beda untuk tiap tipe deformasi, tetapi pada penggunaanya (di bidang teknik), tegangan dan regangan proporsional satu dengan lainnya, konstanta proporsionalitas tersebut disebut modulus elastisitas (E).

$$tegangan = modulus \times regangan$$

Tegangan pada objek didefinisikan sebagai gaya yang diberikan pada objek dibagi satuan luas objek yang menerima gaya tersebut, atau F/A dimana F adalah magnitude gaya dengan satuan Newton dan A adalah satuan luas dengan satuan m^2.

Regangan didefinisikan sebagai perubahan panjang suatu benda dibandingkan dengan panjang awal benda tersebutm disimbolkan dengan $\Delta L/L_0$ dimana ΔL adalah perubahan panjang yang terjadi dalam satuan meter, dan L_0 adalah panjang awal dari benda tersebut.

$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L_0}$$

Meskipun modulus Young (E) sebuah objek mungkin bereda untuk sebuah objek hampir sama untuk tegangan dan regangan, kekuatan objek mungkin akan berbeda sekali untuk tiap tipe tegangan yang berbeda. Misalnya beton, sangat kuat jika menghadapi kompresi tetapi sangat lemah jika menghadapi regangan yang tidak biasa diterima,

Selain itu juga ada pergeseran, tegangan yang juga merupakan gaya per satuan luas tetapi gaya vektornya terletak pada bidang datar tersebut, bukan tegak lurus terhadap bidang tersebut, regangannya adalah $\Delta X/L_0$ dimana ΔX adalah besar pergesaran yang terjadi, modulusnya disebut modulus geser (G).

$$\frac{F}{A} = G\frac{\Delta X}{L_0}$$

Tegangan geser memiliki peranan kritis dalam melengkungkan tiang yang berotasi akibat muatan dan dalam patahnya tulang akibat pembengkokan.

Terakhir terdapat tegangan Hidrolik, atau tegangan pada zat cair, tegangannya merupakan tekanan pada zat cair tersebut, dilambangkan dengan p, sedangkan regangannya adalah $\Delta V/V$, dimana V adalah volume awal sebuah objek zat cair dan ΔV adalah perubahan volume objek zat cair yang terjadi setelah diberi tekanan, modulusnya adalah Modulus Bulk dan disimbolkan dengan B.

Jika suatu objek berasa dalam kondisi terkompresi hidraulik (hydraulic compression), dan tekanannya dapat disebut tegangan hydraulic, , maka untuk situasi tersebut dapat diwakilkan dengan persamaan berikut:

$$p = B\frac{\Delta V}{V}$$

Modulus bulk untuk air adalah 2,2 x 10^9 N/m^2 dan untuk baja adalah 1,6 x 10^{11} N/m^2. Tekanan pada dasar samudra pasifik yang terletak pada rata-rata kedalaman 4000 m adalah 4,0 x 10^7 N/m^2. Perbandingan kompresi $\Delta V/V$ volume air yang disebabkan oleh tekanan tersebut sebesar 1,8%, sementara pada objek baja hanya sekitar 0,025%. Secara umum objek-objek benda padat dengan kisi-kisi atom padat seperti benda tegar kurang dapat dikompresi dari pada cairan, hal ini dikarenakan atom atau molekul cairan kurang terikat erat antara tetangganya.

Bahan	Densitas (kg/m^3)	Modulus E (10^9 N/m^2)	Kekuatan Puncak (10^6 N/m^2
Baja	7860	200	400
Alumunium	2710	70	110
Kaca	2190	65	50
Beton	2320	30	40
Kayu	525	13	50
Tulang	1900	9	170
Polystyrene	1050	3	48

Tabel 2.1 Beberapa konstanta sifat elastis bahan

B. Transformasi Linier

Secara umum transformasi didefinisikan sebagai pemetaan dari suatu himpunan ke himpunan lain, pada makalah ini kita akan membahas transformasi dari suatu ruang vector ke ruang vector lain sehingga operasi standar pada vector seperti penjumlahan dan perkalian scalar tetap berlaku. Dengan kata lain, transformasi dapat dilihat sebagai fungsi bernilai vector yang berasal dari peubah vector juga, jadi domain dan kodomain fungsi transformasi ini adalah vector.

Misalkan V dan W merupakan ruang vector dan T adalah vector unik di dalam W dengan sebuah vector di dalam V, maka kita dapata katakana T memetakan V ke W. Selanjutnya T dinamakan Transformasi dari V ke W, kita akan memfokuskan pada transformasi yang bersifat linear sehingga T merupakan transformasi linear. Kita dapat menuliskannya sebagai berikut.

$$T : V \rightarrow W$$

Lebih lanjut lagi, T mengasosiasikan vector W dan vektor V, dapat ditulis W = T(V) dimana W adalah bayangan dari V oleh T.

Misalkan kembali $\mathbf{v}$ = (x, y) adalah sebuah vector di dalam R^2, maka:

$$T(\mathbf{v}) = (x, x + y, x + 2y)$$

adalah sebuah proyeksi dari R^2 ke R^3.

Contoh jika $\mathbf{v}$ = (0, 1), dimana x = 0, dan y = 1, maka bayangan dari $\mathbf{v}$ oleh T adalah $T(\mathbf{v})$ = (0, 1, 2).

Jika T : V → W adalah sebuah fungsi yang memetakan dari ruang vector V ke ruang vector W, maka fungsi tersebut dinamakan transformasi linear jika :

i. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ untuk semuavektor $\mathbf{u}$ dan vektor $\mathbf{v}$ di dalam V
ii. $T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$ untuk semua skalar k dan semua vector $\mathbf{u}$ di dalam V.

Untuk membuktikannya, misalkan T : $R^2 \rightarrow R^3$ adalah fungsi yang didefinisikan oleh $T(\mathbf{v})$ = (x, x + y, x + 2y). Jika $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ dan $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$, maka

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ sehingga:
$T(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ =
$(x_1 + x_2, [x_1 + x_2] + [y_1 + y_2], [x_1 + x_2] + 2[y_1 + y_2])$
= $(x_1, x_1 + y_1, x_1 + 2y_1) + (x_2, x_2 + y_2, x_2 + 2y_2)$
= $T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

Kemudian jika k adalah sebuah scalar, maka $k\mathbf{u} = (kx_1, ky_1)$, sehingga:

$T(k\mathbf{u}) = (kx_1, kx_1 + ky_1, kx_1 + 2ky_1)$
$= k(x_1, x_1 + y_1, x_1 + 2y_1) = kT(\mathbf{u})$

Jadi T adalah sebuah transformasi linear karena memenuhi syarat (i) dan syarat (ii).

Jika T : V → W adalah sebuah transformasi linear maka untuk setiap $\mathbf{v_1}$ dan $\mathbf{v_2}$ di dalam V dan untuk sebarang k_1 dan k_2, maka kita memperoleh:

$$T(k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2}) = T(k_1\mathbf{v_1}) + T(k_2\mathbf{v_2}) = k_1T(\mathbf{v_1}) + k_2T(\mathbf{v_2})$$

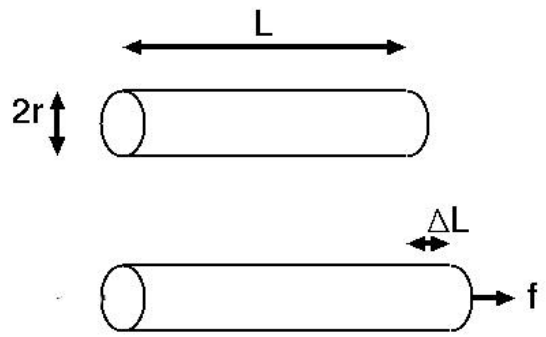
Demikian juga bila terdapat $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, … $\mathbf{v_n}$ di dalam V dan sebarang $k_1, k_2, \ldots, k_n$ scalar, , maka:

$T(k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + \ldots + k_n\mathbf{v_n})$
$= T(k_1\mathbf{v_1}) + T(k_2\mathbf{v_2}) + \ldots. + T(k_n\mathbf{v_n})$
$= k_1T(\mathbf{v_1}) + k_2T(\mathbf{v_2}) + \ldots. + k_nT(\mathbf{v_n})$

Selain itu fungsi T juga dapat dinyatakan dalam matriks untuk mempermudah perhitungan, sehingga menjadi matriks transformasi T, jika terdapat beberapa transformasi beruntun, dapat dilakukan komposisi transoformasi, komposisi transofrmasi dilakukan dengan melakukan perkalian terhadap matriks-matriks transformasi yang ingin di komposisikan.

III. Analisis Kasus

Misalkan sebuah batang baja mempunyai jari-jari R 9,5 mm dan panjang L 81 cm. Sebuah gaya **F** sebesar 62 kilo Newton menarik batang searah memanjang batang.



Gambar 3.1 Analisis Kasus
Source http://www.uic.edu

Pertama yang harus diperhatikan disini adalah gaya **F** sebesar 62 kilo Newton yang arahnya memanjang batang. Kita asumsikan batang tersebut diam, anggaplah batang tersebut ditahan pada sisi lainnya. Lalu gaya **F** diberikan pada ujung lainnya , yang parallel terhadap panjang batang dan tegak lurus terhadap ujung permukaannya. Dengan demikian keadaannnya seperti Gambar 3.1

Berikutnya adalah kita mengasumsikan gaya F yang diberikan sama besarnya untuk tiap satuan luas permukaan ujung batang bagian kanan, sehingga area yang menerima tekanan tersebut yaitu $A = \pi R^2$. Kemudian tegangan pada batang ditentukan melalui persamaan tegangan.

$$\text{tegangan} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi R^2}$$

$$\text{tegangan} = \frac{6{,}2 \times 10^4\, N}{(\pi)(9{,}5 \times 10^{-3}\, m)^2}$$

$$\text{tegangan} = 2{,}2 \times 10^8\, N/m^2$$

Kekuatan hasil untuk baja strukturan adalah $2{,}5 \times 10^8$ N/m^2, jadi batang ini sangat dekat dengan kekuatan luluhnya (*fractura*).

Selain itu adalah pemanjanan batang bergantung pada tekanan, panjang awal L, dan tipe bahan datang. Yang terakhir, tentukan nilai yang akan kita gunakan untuk modulus *Young* E (dari Tabel 2.1). Dengan menggunakan nilai untuk baja, Persamaan regangan memberikan kita.

$$\Delta L = \frac{(F/A)L}{E}$$

$$\Delta L = \frac{(2{,}2 \times 10^8 N/m^2)(0{,}81\, m)}{2{,}0 \times 10^{11} N/m^2}$$

$$\Delta L = 8{,}9 \times 10^{-4} \text{ m} = 0{,}89 \text{ mm}$$

Terakhir yang kita perlakukan disini, yaitu bahwa regangan merupakan perbandungan dari perubahan panjang terhadap panjang awal, sehingga kita saat mempunyai

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{8{,}9 \times 10^{-4}}{0{,}81\, m}$$

$$= 1{,}1 \times 10^{-3} = 0{,}11\%$$

Kemudian setelah mendapatkan ΔL ketika gaya yang diberikan sebesar F, mari kita hitung kembali ΔL ketika gaya yang diberikan adalah ½ F dan ¼ F.

Jika gaya yang diberikan ½ F, maka ΔL menjadi setengahnya pula, dikarenakan gaya F berbanding lurus dengan ΔL, maka $\Delta L_{1/2}$ yaitu:

$$\Delta L_{1/2} = 4{,}45 \times 10^{-4} \text{ m} = 0{,}445 \text{ mm}$$

Sedangkan jika gaya yang diberikan adalah ¼ F, maka $\Delta L_{1/4}$ sama dengan 0,25ΔL.

$$\Delta L_{1/4} = 2{,}225 \times 10^{-4} \text{ m} = 0{,}2225 \text{ mm}$$

IV. ELASTISITAS DENGAN TRANSFORMASI LINIER

Pada analisis kasus batang baja, kita telah memperoleh berbagai data yang akan kita gunakan selanjutnya untuk menemukan fungsi Transformasi untuk menentukan besaran perubahan batang baja, beberapa data penting yaitu ketika batang baja dengan jari-jari R = 9,5 mm dan panjang L = 81 cm ditarik dengan gaya F sebesar 62.000 Newton pada salah satu ujungnya dan ujung lain diberi penahan, maka batang baja tersebut akan berubah panjangnya sebesar $\Delta L = 8{,}9 \times 10^{-4}$ m atau 0,11% dari panjang awal.

Ketika gaya yang diberikan diperkecil menjadi setengah dari F atau sebesar 31.000 maka perubahan panjang batang tersebut menjadi $4{,}45 \times 10^{-4}$ m atau sama dengan 0,5ΔL, kemudian ketika gaya yang diberikan diperkecil lagi menjadi 0,25F atau sebesar 15.500 Newton, maka perubahan panjang yang terjadi $2{,}225 \times 10^{-4}$ m atau 0,25ΔL.

Berdasarkan data diatas ditemukan kelinearan atau kelanjaran pada perubahan ΔL sehingga kita dapat membawa masalah ini ke dalam representasi transformasi linear.

Gambar 4.1 Representasi ΔL pada sumbu kartesian

Pada gambar 4.1 terlihat perbedaan walaupun sangat kecil antara titik-titik ujung dari kawat baja yang kita bahas pada analisis kasus, dengan menggunakan transformasi, kita akan mencari fungsi T yang akan mentransformasikan titik pada X = 81 menjadi X = 0,089 jika input gaya yang diberikan sebesar 62.000 Newton, tetapi titik X = 81 akan bertransformasi ke X = 0,0445 jika input gayanya sebesar 31.000 N, sedangkan jika titik yang ditransformasikan menerima input gaya sebesar 15.500 atau seperempat dari gaya awal, transformasi titik X akan menjadi ke X = 0.02225 cm.

Dengan menggunakan data kelinearan yang ada, kita akan menemukan T dimana T(k81) = 0,089 jika k = 62.000, kemudian T(k81) = 0,0445 jika k = 31.000 dan T(k81) = 0,02225 jika k = 15.500.

Selanjutnya fungus T(kx) = kxy, maka 81(62000)y = 0,089 kemudian 81(31000)y = 0.0445 dan 81(15500)y = 0,02225. Kemudian kita akan menemukan nilai y = $1{,}7722 \times 10^{-8}$. Sehingga terakhir kita menemukan fungsi transformasi $T(kx) = k(x)(1{,}7722 \times 10^{-8})$

Nilai y untuk tiap bahan akan berbeda-beda, tergantung dari jenis bahan yang akan kita gunakan, semakin lentur atau semakin elastic bahan yang kita gunakan, tentu akan membuat nilai y yang kita peroleh semakin besar, sebaliknya semakin kaku bahan yang kita gunakan, tentu akan membuat nilai y yang kita peroleh semakin kecil.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

Metode transformasi ini merupakan salah satu cara untuk melakukan perkiraan perubahan panjang benda yang elastis secara matematis, tujuan dari metode ini adalah mencari nilai y dari tiap bahan sehingga jika terdapat input gaya lain, kita dapat mengetahui berapa perubahan panjang yang akan terjadi atau perubahan lebar yang akan terjadi bergantung pada bagian objek yang mendapat gaya tersebut.

Pengunaan transformasi sangat beragam, selain untuk mencari perubahan panjang benda yang elastis seperti yang dijelaskan pada makalah ini, juga banyak terdapat penggunaan lain yang juga menggunakan metode yang sama dengan metode yang ada di makalah ini, oleh karena itu konsep penggunaan transformasi pada makalah ini dapat diterapkan pada persoalan-persoalan linear lainnya.

Permasalahan-permasalahan linear pun cukup banyak sehingga saran dari penulis agar matematika tidak hanya dipelajari teori saja, begitu banyak hal-hal nyata yang dapat dimodelkan dengan matematika sehingga dengan memodelkan suatu kasus dalam konsep matematika, dapat diketahui perubahan-perubahan yang akan terjadi serta besar perubahan-perubahan peubah lain jika salah satu peubah berubah nilainya.

VII. TERIMA KASIH

Pertama-tama penulis berterima kasih kepada Tuhan Yang Maha Esa yang atas rahmat dan karunia-Nya penulis dapat menyelesaikan makalah ini tepat pada waktunya tanpa ada halangan yang berarti dan berkat-Nya pula tulisan ini dapat sampai kepada pembaca. Selain itu penulis juga ingin mengucapkan terima kasih kepada Pak Rinaldi Munir dan Pak Judhi Santoso yang telah banyak memberikan ilmu kepada penulis khususya mengenai Transformasi pada Mata Kuliah Aljabar Geometri sehingga penulis dapat membuat makalah ini atas ilmu tersebut. Terakhir terima kasih untuk teman-teman yang telah membantu penulis, bahu membahu saling mengajar agar dapat mengerti materi-materi yang disampaikan di kelas, khususnya pada kuliah Aljabar Geometri.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Halliday, David, Robert Resnick, Jearl Eaarker, “Physics”, 7th extended edition. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2005, pp. 330–347.

[2] Tipler, Paul A, Gene Mosca, “Physics for Scientist and Engineer” 5th International Student Version Edition. New York: W.H. Freeman, 2003, pp. 123–135

[3] Strang, Gilbert, “*Linear Algebra and it’s Application”*.4th edition New York: Pearson, 2011, pp 140-153.

[4] Vince,John. “Geometric Algebra for Computer Graphic”. London: Springer Verlag London Limited.2008

[5] “Transformasi Linear”, dari http://repository.binus.ac.id/content/K0034/K003481224.pdf diakses pada tanggal 14 Desember 2015 Pukul 20.20

[6] ”Elastisitas Permintaan dan Penawaran”, dari http://basicekonomi.blogspot.co.id/2013/05/elastisitas-permintaan-dan-penawaran.html diakses pada tanggal 14 Desember 2015 pukul 21.00

[7] “Elastisitas Gaya Pegas”, dari http://fisikastudycenter.com/fisika-xi-sma/32-elastisitas-gaya-pegas diakses pada 14 Desember 2015 pukul 21.06

[8] “Transformasi Linear dan Matriks”, dari http://personal.fmipa.itb.ac.id/novriana/files/2010/09/6-Transformasi-Linier-v2011.pdf diakses pada 14 Desember 2015 pukul 21.10

[9] “Transformasi Linear dan Rn ke Rm”, dari http://share.its.ac.id/pluginfile.php/1466/mod_resource/content/1/LO15_Transfomasi_Linear_Rn_ke_Rm.pdf diakses pada 15 Desember 2015 pukul 08.20

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 15 Desember 2015

Cut Meurah Rudi - 13514057