Transformasi Lanjar dalam Game dengan Grafis Berbasis Vektor

Yeksadiningrat Al Valentino,13514055[1]
Program Studi Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
[1]*13514055@std.stei.itb.ac.id*

***Abstract*—Makalah ini tentang bagaimana sebuah game dengan grafis berbasis vektor dapat dibuat dengan menggunakan aljabar lanjar sebagai salah satu mekanik game.**

***Keywords*—2d,aljabar,game,lanjar,retro.**

I. LATAR BELAKANG

Matematika memiliki pengaruh besar terhadap perkembangan video game. Tanpa matematika video game tidak akan pernah ditemukan.

Video game zaman ini sudah sangat maju dengan grafis 3D yang sudah menyerupai dunia nyata. Namun bagi para pengembang game pada tahun 1970,1980 hal tersebut tidak mungkin dicapai karena keterbatasan teknologi yang tersedia pada zaman itu. Hal tersebut dapat diatasi dengan salah satu caranya menggunakan grafis berbasis vektor.

Gambar yang berbasis vektor tidak terbentuk dengan sekumpulan pixel melainkan dengan titik, garis dan kurva yang merepresentasikan suatu persamaan matematika.

II. TEORI DASAR

Grafis Vektor

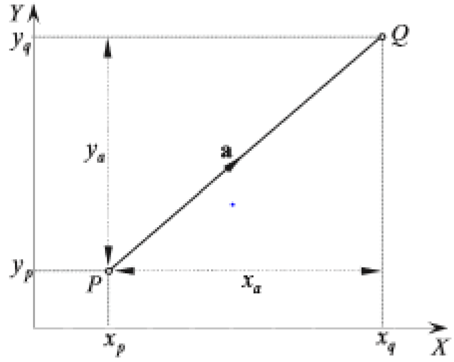
Tidak seperti JPEG,GIF, atau semacamnya gambar yang dibentuk pada grafis vektor bukan merupakan kumpulan dari beberapa titik *(pixel)* melainkan merupakan kumpulan dari titik, garis dan kurva yang digambarkan dengan suatu rumus matematika. Cara ini dapat menggambar dari sesuatu yang sederhana sampai dengan diagram yang kompleks.

Karena gambar yang berbasis vektor tidak dimuat oleh beberapa titik seperti pada gambar *bitmap*. Gambar yang berbasis vektor dapat diperbesar tanpa mengurangi sedikitpun kualitas dari gambar tersebut.

Vektor

Dalam kehidupan sehari-hari biasanya kita menyelesaikan suatu masalah dengan menggunakan aljabar scalar, tapi untuk memanipulasi sebuah gaya atau kecepatan dimana saat melakukan suatu perhitungan dibutuhkan juga arah dari suatu nilai maka akan digunakanlah vektor.

Sebuah nilai digambarkan dengan vektor dengan sebuah garis dengan panjangnya adalah nilai dan panahnya adalah arah dari nilai tersebut.



Gambar 1.1 contoh sebuah vektor

Pada gambar 1.1 ditunjukan sebuah vektor dalam R^2 dari dua titik yang dimulai dari P dan berakhir di Q dimana

$$P = (x_p, y_p) dan\ Q = (x_q, y_q)$$

dan

$$a = \begin{bmatrix} x_q - x_p \\ y_q - y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \end{bmatrix}$$

Maka panjang dari vektor a adalah

$$\|a\| = \sqrt{x_a{}^2 + y_a{}^2}$$

Ruang Vektor

Ruang vektor adalah kumpulan dari vektor. Dua ruang Euclidean yang cukup dikenal adalah R^2 dan R^3, dimana R^2 adalah kumpulan dari 2 pasangan bilangan riil dan R^3 adalah kumpulan dari 3 pasangan bilangan riil. Secara umum ruang vektor R^n dapat dikatakan sebagai kumpulan n pasangan. bilangan riil seperti $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

Dimana n adalah bilangan bulat positif dan mendiskripsikan dimensi ruang vektor. Apabila n>3 maka tidak mungkin untuk memvisualisasi ruang vektor tersebut karena keterbatasan otak manusia.

Transformasi Lanjar

Transformasi lanjar T:U→V adalah fungsi T dimana membawa elemen dari ruang vektor U ke ruang vektor V. Dengan syarat

- $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)\ untuk\ semua\ u_1, u_2 \in U$
- $T(\alpha u) = \alpha T(u) untuk\ semua\ u \in U\ dan\ a \in C$

Sebagai contoh, apakah dari $T : C^3 \to C^2$ yang dideskripsikan dengan rumus termasuk transformasi lanjar

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 \\ -4x_2 \end{pmatrix}$$

Dengan mendifinisikan

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right) \\
&= T\left(\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 2(x_1 + y_1) + (x_3 + y_3) \\ -4(x_2 + y_2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (2x_1 + x_3) + (2y_1 + y_3) \\ -4x_2 + (-4)y_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2x_1 + x_3 \\ -4x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y_1 + y_3 \\ -4y_2 \end{bmatrix} \\
&= T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right) \\
&= T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
T(\alpha\mathbf{x}) &= T\left(\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) \\
&= T\left(\begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 2(\alpha x_1) + (\alpha x_3) \\ -4(\alpha x_2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha(2x_1 + x_3) \\ \alpha(-4x_2) \end{bmatrix} \\
&= \alpha \begin{bmatrix} 2x_1 + x_3 \\ -4x_2 \end{bmatrix} \\
&= \alpha T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) \\
&= \alpha T(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

Karena kedua syarat terpenuhi maka transformasi tersebut termasuk transformasi lanjar.

Matriks Transformasi Lanjar

Sebuah fungsi transformasi dapat dinyatakan dalam bentuk matriks. Misalkan $P: C^4 \to C^3$ dimana $P(x) = Ax$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \end{bmatrix}$$

maka

$$\begin{aligned}
P(\mathbf{x}) &= A\mathbf{x} \\
&= x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 2x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_2 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8x_3 \\ 5x_3 \\ 3x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_4 \\ -2x_4 \\ -7x_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 \\ 2x_1 + 5x_3 - 2x_4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 7x_4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Begitu juga sebaliknya.

Misalkan $R: C^3 \to C^4$ dengan

$$R\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 \\ x_2 - 4x_3 \end{bmatrix}$$

Lalu

$$R(x) = Bx$$

$$R\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 \\ x_2 - 4x_3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_1 \\ -x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3x_2 \\ x_2 \\ 5x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4x_3 \\ x_3 \\ -3x_3 \\ -4x_3 \end{bmatrix}$$
$$= x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Maka didapat

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

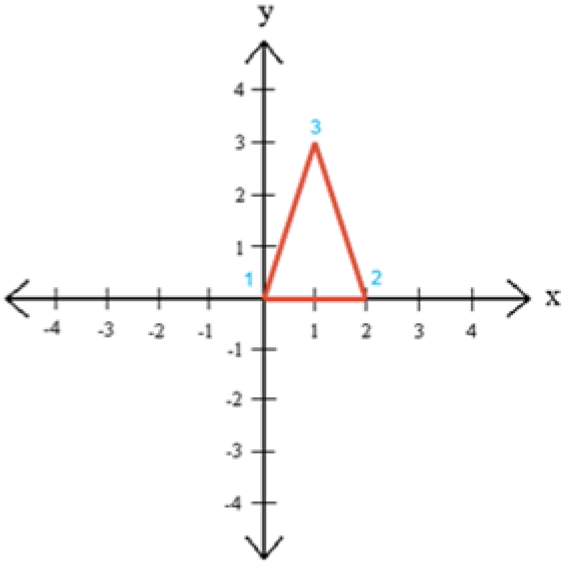
III. TRANSFORMASI LANJAR PADA VECTOR BASED GAME

Konsep game yang ingin dibuat adalah mengendalikan pesawat agar tidak menabrak asteroid.

Gambar 2.1*vector-based graphicgame*

A. *Build a ship*

Pesawat bisa dibentuk sesuai dengan keinginan, misalkan ingin pesawat berbentuk segitiga. Buat matriks yang menandakan ketiga simpul dari segitiga tersebut. Misalkan titik pada (0,0),(2,0),(1,3)



Gambar 2.2 pesawat dalam bentuk vektor

Maka pesawat itu bisa direpresentasikan dengan matriks

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

B. *Flying forward*

Misalkan ingin menggerakan pesawat r unit ke kanan dan s unit ke atas maka dapat dilakukan dengan mengubah matriks dari pesawat tersebut

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & r & r \\ s & s & s \end{bmatrix}$$

Atau kita bisa membuat matriks transformasinya. Untuk memudahkan maka matriks posisi pesawat ditambah *dummy* elemen yang bernilai 1 sehingga menjadi

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka matriks transfornasinya menjadi

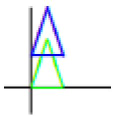
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 2+r & 1+r \\ s & s & 3+s \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Karena sudah diketahui matriks transformasi dari translasi, misalkan ingin membuat pesawat maju sebanyak 2 unit per framenya maka dapat mengaplikasikan matriks transformasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga matriks posisi pesawat akan menjadi

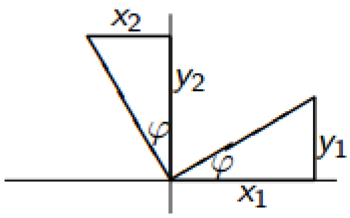
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Gambar 2.3 Pesawat setelah maju sebanyak 2 unit

C. Rotating

Jika pesawat tidak dapat berbelok tentu akan menabrak asteroid. Maka pesawat harus dapat berbelok. Berbelok dapat dilakukan dengan matriks transformasi rotasi



$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Gambar 2.4 konsep dasar matriks transformasi rotasi

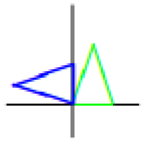
Dengan meaplikasikan konsep tersebut dan dengan matriks posisi pesawat yang berukuran 3x3 maka matriks rotasi dari pesawat akan menjadi.

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jika kita terapkan matriks tersebut ke matriks posisi pesawat

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka pesawat akan menjadi



Gambar 2.5 Pesawat setelah dirotasi sebanyak 90^{o}

Namun rotasi tersebut memiliki poros di titik (0.0) sehingga hasilnya akan menjadi tidak seperti pesawat yang berbelok, maka rotasi harus dilakukan dengan pusat pesawat sebagai porosnya. Maka untuk menyelesaikan masalah tersebut dilakukan tiga tahap yaitu translasi, rotasi dan translasi.

Pertama tentukan titik pusat dari pesawat, misalkan pesawat berada seperti pada Gambar 2.2, titik pusat pesawat tersebut menjadi (1, 1.5). Maka transformasi dilakukan dengan mentraslasi pesawat sebanyak satu ke kanan dan 1.5 ke atas, lalu di rotasi dan mentranslasi pesawat tersebut ke posisi awal sebelum translasi pertama.

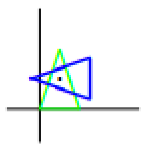
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2.5 \\ 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jika diaplikasikan pada pada matriks posisi pesawat

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2.5 \\ 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & 2.5 & -0.5 \\ 0.5 & 2.5 & 1.5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jika digambarkan



Gambar 2.6 Pesawat setelah berbelok 90^{o}

Pesawat sudah berbelok seperti seharusnya.

V. CONCLUSION

Grafis vektor adalah cara memanipulasi gambar di komputer dengan aljabar lanjar seperti translasi, rotasi dan banyak hal dalam *vector-based graphic game.*

VII. ACKNOWLEDGMENT

Penulis mengucapkan terimakasih kepada Tuhan YME karena berkahNya penulis dalam menyelesaikan makalah ini. Semua teman teman yang sudah membantu penulis dalam hal moral dan membantu memberi ide.

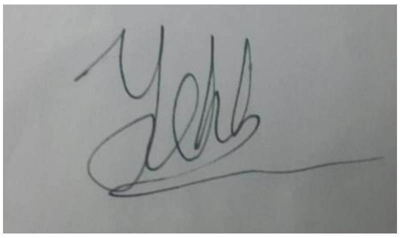
DAFTAR PUSTAKA

[1] http://web.csulb.edu/~jchang9/m247/m247_sp12_Daniel_Kris_James_Walter.pdf diakses pada tanggal 15 Desember 2015 pukul 19.00.
[2] http://techterms.com/definition/vectorgraphic diakses pada tanggal 15 Desember 2015 pukul 19.20.
[3] V. John, "Geometric Algebra for Computer Graphics,"
[4] http://linear.ups.edu/html/section-LT.html diakses pada tanggal 15 Desember 2015 pukul 22.00.
[5] https://math.dartmouth.edu/archive/m22s07/public_html/VectorSlides.pdf diakses pada tanggal 15 Desember 2015 pukul 22.10.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 27 November 2013



Yeksadiningrat Al Valentino, 13514055