Penerapan Sistem Persamaan Lanjar Pada Rangkaian Listrik

Ahmad Fa'iq Rahman – 13514081
Program Studi Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
afaiq@students.itb.ac.id

***Abstrak*—Rangkaian listrik sedikit banyak telah menjadi momok bagi mahasiswa terutama mahasiswa tingkat 1 di Sekolah Teknik Elektro dan Informatika (STEI). Pada semester kedua, kami mendapatkan mata kuliah ini dan kebanyakan menilai bahwa mata kuliah ini adalah mata kuliah yang sangat sulit meskipun tidak sedikit pula yang berkata sebaliknya. Pada mata kuliah tersebut, sistem persamaan lanjar banyak digunakan dan diterapkan dalam penyelesaian permasalahan rangkaian listrik, terutama permasalahan rangkaian listrik sederhana. Dalam makalah ini, saya ingin mengulas dan membahas penerapan serta penggunaan sistem persamaan lanjar tersebut.**

***Keywords*—Rangkaian Listrik, Sistem Persamaan Lanjar, Matriks.**

I. PENDAHULUAN

Banyak cabang-cabang yang telah disediakan untuk dipilih saat membuat makalah ini. Saya memilih untuk membahas tentang sistem persamaan ,lanjar dan penerapannya pada dunia nyata. Sistem persamaan lanjar merupakan salah satu cabang ilmu yang diajarkan dalam kuliah Aljabar Geometri yang diajarkan pada semester III program studi teknik informatika. Sistem persamaan lanjar juga merupakan salah satu cabang matematika yang penggunaannya sangatlah beragam dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu penerapannya yaitu dalam menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang berhubungan dengan rangkaian listrik.

Dalam makalah ini, saya ingin membahas penggunaan sistem persamaan lanjar pada penyelesaian masalah rangkaian listrik. Permasalahan rangkaian listrik yang pada umumnya sangat sulit dalam penyelesaiannya, dapat dikerjakan dan diselesaikan dengan menerapkan sistem persamaan lanjar pada persoalan tersebut. Banyak cara lain dalam menyelesaikan permasalahan rangkaian listrik, namun saya hanya akan membahas penyelesaian menggunakan sistem persamaan lanjar dan beberapa lanjutannya.

Saya mengambil topik ini karena beberapa bulan yang lalu, saat semester II, tepatnya ketika saya mengambil mata kuliah Pengantar Analisis Rangkaian (PAR). Dosen yang mengajar saya menggunakan sistem persamaan lanjar untuk menyelesaikan permasalahan rangkaian listrik. Seharusnya, setelah saya mengambil mata kuliah tersebut, saya sudah mengerti atau setidaknya tahu tentang penggunaan sistem persamaan lanjar ini. Namun, pada kenyataanya, saya belum terlalu mengerti dan saya berharap dengan menulis makalah ini, saya bisa mengerti atau setidaknya tahu dasar-dasar dari penyelesaian permasalahan rangkaian listrik dengan menggunakan sistem persamaan lanjar dan cabang dari ilmu tersebut.

Sistem persamaan lanjar hanya digunakan dalam permodelan pada rangkaian listrik dan penyelesaiannya bergantung dari seberapa kompleks permasalahan yang ada. Sistem persamaan lanjar dapat diselesaikan langsung atau dapat pula diselesaikan dengan dimodelkan kedalam matriks. Tipe yang ingin saya bahas pada makalah ini merupakan penyelesaian masalah rangakaian listrik menggunakan matriks.

II. TEORI DASAR

Beberapa teori dasar tentang sistem persamaan lanjar, matriks dan rangkaian listrik yang harus diketahui.

1. Persamaan Lanjar

Persamaan lanjar adalah persamaan yang mengandung minimal satu peubah dengan pangat tertinggi 1.

$$x - 6y - 3z = -28$$

Gambar 1: Contoh Persamaan Lanjar. (http://itsystemid.blogspot.co.id/2014/05/soal-dan-pembahasan-sistem-persamaan.html, diakses 15/12/2015, 10:24)

2. Sistem Persamaan Lanjar

Sistem persamaan lanjar merupakan kumpulan persamaan lanjar berjumlah 2 atau lebih, biasanya jumlah persamaan sama dengan jumlah peubah.

$$2x - 2y - 2z = 9$$
$$x - 6y - 3z = -28$$
$$3x + 2y + z = 16$$

Gambar 2: Contoh Sistem Persamaan Lanjar.

(http://itsystemid.blogspot.co.id/2014/05/soal-dan-pembahasan-sistem-persamaan.html, diakses 15/12/2015, 10:24)

3. Matriks

Matriks merupakan kumpulan bilangan yang disusun dan diatur dalam baris dan kolom sehingga membentuk persegi/ persegi panjang.

$$N = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -12 \\ 6 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Gambar 3: Contoh Matriks (https://nitarianti.wordpress.com/2011/12/07/jenis-jenis-matriks/, diakses 15/12/2015, 10:26)

Jenis-jenis Matriks:

a. Matriks Nol

Matriks yang elemennya hanya bernilai 0.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gambar 4: Contoh Matriks Nol (https://nitarianti.wordpress.com/2011/12/07/jenis-jenis-matriks/, diakses 15/12/2015, 10:26)

b. Matriks Baris

Matriks yang terdiri dari satu baris.

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Gambar 5: Contoh Matriks Baris (https://nitarianti.wordpress.com/2011/12/07/jenis-jenis-matriks/, diakses 15/12/2015, 10:26)

c. Matriks Kolom

Matriks yang terdiri dari satu kolom.

$$K = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Gambar 6: Contoh Matriks Kolom (https://nitarianti.wordpress.com/2011/12/07/jenis-jenis-matriks/, diakses 15/12/2015, 10:26)

d. Matriks Persegi

Matriks yang jumlah baris dan jumlah kolomnya sama.

$$N = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -12 \\ 6 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Gambar 7: Contoh Matriks Persegi (https://nitarianti.wordpress.com/2011/12/07/jenis-jenis-matriks/, diakses 15/12/2015, 10:26)

e. Matriks Segitiga Atas

Matriks persegi yang elemen dibawah diagonal utamanya bernilai nol

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

Gambar 8: Contoh Matriks Segitiga Atas (https://nitarianti.wordpress.com/2011/12/07/jenis-jenis-matriks/, diakses 15/12/2015, 10:26)

f. Matriks Segitiga Bawah

Matriks persegi yang elemen diatas diagonal utamanya bernilai nol

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Gambar 9: Contoh Matriks Segitiga Bawah (https://nitarianti.wordpress.com/2011/12/07/jenis-jenis-matriks/, diakses 15/12/2015, 10:26)

g. Matriks Diagonal

Matriks persegi yang elemen-elemennya bernilai nol, kecuali pada diagonal utamanya.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Gambar 10: Contoh Matriks Diagonal (https://nitarianti.wordpress.com/2011/12/07/jenis-jenis-matriks/, diakses 15/12/2015, 10:26)

h. Matriks Identitas

Matriks persegi yang elemen-elemen pada diagonal utama bernilai 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gambar 11: Contoh Matriks Identitas (https://nitarianti.wordpress.com/2011/12/07/jenis-jenis-matriks/, diakses 15/12/2015, 10:26)

i. Matriks *Transpose*

Jika diketahui suatu matriks A berukuran mxn makar A^T adalah *transpose* dari A dengan menuliskan baris ke-i dari A adalah kolom ke-i dari A^T.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Transpose}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Gambar 12: Contoh Matriks *Transpose* (http://t1nez.blogspot.co.id/2009/01/microsoft-excel-matriks-function.html, diakses 15/12/2015. 10:27)

4. Operasi Baris Elementer

Operasi baris elementer merupakan operasi yang dilakukan pada matriks sehingga membuat elemen dari diagonal utama bernilai 1. Ada beberapa operasi yang dapat dilakukan yaitu:

a. Perturkaran baris

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} b_1 \leftrightarrow b_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Gambar 13: Contoh Pertukaran Baris (http://www.slideshare.net/martayuda/aljabar-linier-131, diakses 15/12/2015, 10:30)

b. Perkalian baris dengan konstanta tak nol.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4} b_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Gambar 14: Contoh Perkalian Baris dengan Konstanta tak Nol (http://www.slideshare.net/martayuda/aljabar-linier-131, diakses 15/12/2015, 10:30)

c. Penjumlahan satu baris dengan baris lainnya.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-b_1 + b_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Gambar 13: Contoh Penjumlan Baris (http://www.slideshare.net/martayuda/aljabar-linier-131, diakses 15/12/2015, 10:30)

5. Eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan

a. Eliminasi Gauss

Eliminasi Gauss adalah mengubah sebuah isi sebuah matriks dengan menggunakan operasi baris elementer (OBE) dan menjadikan diagonal dari matriks bernilai satu dan setiap nilai dibawah diagonal bernilai nol.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gambar 14: Contoh Eliminasi Gauss (https://courses.candelalearning.com/finitemath1xmaster/chapter/reading-solving-systems-with-gaussian-elimination/, diakses 15/12/2015, 11:00)

b. Eliminasi Gauss-Jordan

Eliminasi Gauss-Jordan merupakan modifikasi dari eliminasi gauss yang membuat diagonal matriks bernilai satu dan nilai lainnya bernilai nol.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 17 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Gambar 15: Contoh Eliminasi Gauss-Jordan (http://www.mathwords.com/g/gauss-jordan_elimination.htm, diakses 15/12/2015, 10:31)

6. Hukum Kirchhoff & Ohm

a. Hukum Kirchhoff

Kirchhoff Current Law (KCL) menyatakan bahwa jumlah aljabar dari setiap arus yang masuk kedalam sebuah node (titik) pada sebuah rangkaian listrik adalah nol.

Kirchhoff Voltage Law (KVL) menyatakan bahwa jumlah aljabar dari semua tegangan yang ada dalam sebuah kalang tertutup pada sebuah rangkaian listrik adalah nol.

b. Hukum Ohm

Hukum Ohm menyatakan bahwa tegangan pada sebuah resistor berbanding lurus dengan arus yang mengalir pada resistor tersebut.

$V = I \cdot R$

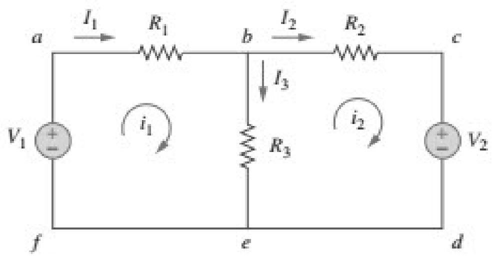
V : tegangan

I : arus

R : hambatan

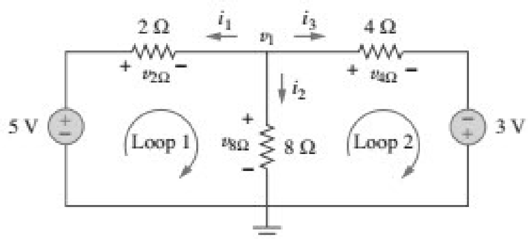
7. Analisa Mesh dan Nodal

Analisa Mesh merupakan prosedur umum dengan menggunakan mesh sebagai variabel pada sirkuit untuk menganalisa sebuah rangkaian listrik dengan menerapkan KVL. Mesh adalah sebuah kalang pada rangkaian listrik yang tidak mengandung kalang lainnya.



Gambar 16: Contoh Analisa Mesh
(Alexander, Charles K, Matthew N. O. Sadiku. 2013. *Fundamentals of Electric Circuit,* 5th edition. New York: McGraw-Hill., hal. 94)

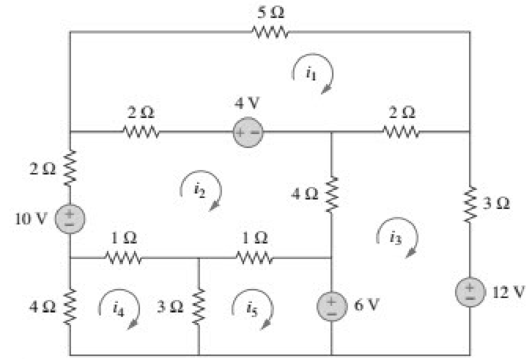
Analisa Nodal merupakan prosedur umum dengan menggunakan *node* sebagai variabel pada sirkuit untuk menganalisa sebuah rangkaian listrik dengan menerapkan KCL. *Node* adalah sebuah titik yang menghubungkan dua atau lebih elemen pada rangkaian listrik



Gambar 17: Contoh Analisa Nodal
(Alexander, Charles K, Matthew N. O. Sadiku. 2013. *Fundamentals of Electric Circuit,* 5th edition. New York: McGraw-Hill., hal. 22)

III. PEMBAHASAN

Dalam pembahasan ini akan dipaparkan sebuah contoh masalah serta penggunaan sistem persamaan lanjar dan matriks dalam menyelesaikan persamaan-persamaan tersebut. Dalam pembahasan ini juga, saya tidak akan menuliskan seluruh langkah yang saya kerjakan karena hanya akan menghabiskan banyak tempat. Selain itu, saya juga menggunakan alat bantu berupa aplikasi yang telah dibuat pada kesempatan sebelumnya yaitu tugas besar pertama kuliah Aljabar Geometri. Aplikasi ini dibuat untuk mengerjakan operasi baris elementer (OBE) dalam eliminasi Gauss-Jordan.



Dengan menggunakan analisa mesh didapatkan:

Nilai matriks R selain diagonal:
$R_{12} = -2\ \Omega$, $R_{13} = -2\ \Omega$, $R_{14} = 0\ \Omega$, $R_{15} = 0\ \Omega$,
$R_{21} = -2\ \Omega$, $R_{23} = -4\ \Omega$, $R_{24} = -1\ \Omega$, $R_{25} = -1\ \Omega$,
$R_{31} = -2\ \Omega$, $R_{32} = -4\ \Omega$, $R_{34} = 0\ \Omega$, $R_{35} = 0\ \Omega$,
$R_{41} = 0\ \Omega$, $R_{42} = -1\ \Omega$, $R_{43} = 0\ \Omega$, $R_{45} = -3\ \Omega$,
$R_{51} = 0\ \Omega$, $R_{52} = -1\ \Omega$, $R_{53} = 0\ \Omega$, $R_{54} = -3\ \Omega$

Nilai matriks R pada diagonal:
$R_{11} = 5 + 2 + 2 = 9\ \Omega$
$R_{22} = 2 + 4 + 1 + 1 + 2 = 10\ \Omega$
$R_{33} = 2 + 3 + 4 = 9\ \Omega$
$R_{44} = 1 + 3 + 4 = 8\ \Omega$
$R_{55} = 1 + 3 = 4\ \Omega$

Volt masukan:
$V_1 = 4$ v
$V_2 = 10 - 4 = 6$ v
$V_3 = -12 + 6 = -6$ v
$V_4 = 0$ v
$V_5 = -6$ v

Dari hukum Kirchhoff:
V = I . R
atau
R . I = V

membentuk:

$$\begin{vmatrix} 9 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & -4 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 6 \\ -6 \\ 0 \\ -6 \end{vmatrix}$$

Menerapkan Gauss-Jordan pada matriks *augmented* dengan menggunakan operasi baris elementer (OBE):

$$\left|\begin{array}{ccccc:c} 9 & -2 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & 10 & -4 & -1 & -1 & 6 \\ -2 & -4 & 9 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 8 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 4 & -6 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.38294894 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.21104115 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.4877708 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.7183787 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1.9860238 \end{array}\right|$$

Maka:
$I_1 = 0.38294894$ A
$I_2 = 0.21104115$ A
$I_3 = -0.4877708$ A
$I_4 = -0.7183787$ A
$I_5 = -1.9860238$ A

IV. Kesimpulan

Dari pembahasan yang telah dilakukan diatas, sebuah persoalan rangkaian listrik dapat dipecahkan dan diselesaikan menggunakan metode penyelesaian sistem persamaan lanjar yaitu matriks. Namun ada beberapa persoalan rangkaian listrik yang belum dapat diselesaikan contohnya jika rangkaian listrik tersebut merupakan rangkaian listrik kompeks.

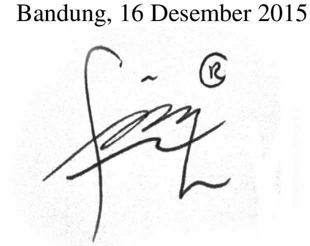
References

[1] Howard Anton, *Elementary Linear Algebra*, 10th edition, John Wiley amnd Sons, 2010
[2] Alexander, Charles K, Matthew N. O. Sadiku. 2013. *Fundamentals of Electric Circuit,* 5th edition. New York: McGraw-Hill.
[3] http://t1nez.blogspot.co.id/2009/01/microsoft-excel-matriks-function.html, diakses 15/12/2015. 10:27
[4] http://www.slideshare.net/martayuda/aljabar-linier-131, diakses 15/12/2015, 10:30
[5] https://nitarianti.wordpress.com/2011/12/07/jenis-jenis-matriks/, diakses 15/12/2015, 10:26
[6] https://courses.candelalearning.com/finitemath1xmaster/chapter/reading-solving-systems-with-gaussian-elimination/, diakses 15/12/2015, 11:00

Pernyataan

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 16 Desember 2015



Ahmad Fa'iq Rahman – 13514081