Penggunaan Aljabar Lanjar di Metode Prediksi Statistika

Ade Surya Ramadhani 13514049
Program Studi Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
Adesurya559@gmail.com

***Abstract*—Aljabar lanjar adalah salah satu turunan dari matematika yang banyak penggunaannya.Aljabar lanjar sendiri dapat berupa system persamaan lanjar,matriks ,vector ,transformasi lanjar. Contoh penggunaannya sendiri dibidang telekomunikasi seperti *channel assignment* , atau dibidang grafika dan citra. Tapi tahukah anda ? selain dibidang-bidang tersebut yang memerlukan pemecahan masalah yang rumit, Aljabar lanjar ini dapat digunakan dalam bidang statistika yaitu di bagian Matriks dan persamaan lanjar. Di makalah ini akan dibahas implementasi Aljabar lanjar khususnya dibidang statistika.**

***Keywords*— Aljabar lanjar ,matriks ,statistika.**

I. Pendahuluan

Statistik adalah hal yang berkenaan dengan data dan numerik.Oleh karena itu statitika adalah salah satu cabang ilmu matematis yang mempelajari bagaimana merencanakan ,menganalisisi ,mengolah dan menginterpretesi Data. Dari kumpulan data dapat digunakan untuk mendeskripsikan data tersebut. Sebenarnya sudah banyak orang orang yang menngunakan setatistika contoh menghitung jumlah populasi penduduk, perpajakan, pencatatatan personil militer dan lain-lain.Dalam bidang Politik,Ekonomi dan bisnis misalnya dalam memprediksi volume dan nilai penjualan untuk periode tertentu, memprediksi perubahan darstis di produksi, efisiensi pemakaian materil, riset niaga niaga modern. Bisa juga membantu pimpinan suatu perusahaan dalam memngambil keputusan. Data biasanya yang diolah dibuat lebih general dan mudah dibaca danjuga mudah diubah-ubah karena akan selalu berubah setiap waktu. Data biasanya akan dibuat berbagai grafik, chart, ataupun table. Tapi statistika tidak hanya tertuju pada bidang social saja Pada bidang sains ataupun *engineering* ilmu statistika juga banyak digunakan. Contohnya pada pengolahan data di Lab. Hal ini dapat berbahaya jika seseorang tidak memiliki ilmu statistika sehingga salah mengolah data tersebut. Jadi Ilmu statistika kurang lebih dapat diterapakan disemua disiplin ilmu. Ada beberapa keilmuan statistika yang memenfaatkan aljabar lanjar dalam perhitungan.Yaitu menggunaakan matriks dan pembentukan persamaan lanjar.

II. Dasar Teori

2.1 Matriks dan jenisnya

Matriks adalah kumpulan bilangan yang berbentuk segi empat yang tersusun dalam baris dan kolom.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

untuk setiap i=1,2,…,*m* dan j=1,2,…,*n* dinamakan **unsur/entri/elemen** matriks yang terletak pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j*. **Ukuran (ordo)** suatu matriks merupakan jumlah baris kali jumlah kolom. Jadi, martiks A di gambar merupakan matriks berukuran *m x n*. Kedua matriks dikatakan sama jika semua unsur-unsur matriks yang terletak pada kedua matriks tersebut adalah sama selain jumlah baris dank olm yang harus juga sama.

Ada beberapa jenis matriks yang perlu diketahui dan dijadikan dasar untuk pemahaman. Yakni:

1. Matriks Bujur Sangkar
   Merupakan matriks yang jumlah baris dan kolomnya sama, atau berukuran *m* x *m*.
2. Matriks Diagonal
   Merupakan matriks bujur sangkar dimana unsur selain unsur diagonalnya adalah 0. Unsur diagonal adalah jika i=j di unsur $a_{ij.}$
3. Matriks Identitas
   Merupakan matriks Diagonal yang semua unsur diagonalnya 1.
4. Matriks Segitiga
   Ada 2 macam matriks segitiga yaitu matriks segitiga atas dan bawah.Matriks segitiga atas adalah matriks bujur sangkar yang semua unsur dibawah unsur diagonalnya bernilai 0. Sedangkan matriks segitiga bawah adalah matriks bujur sangkar yang semua unsur diatas unsur diagonalnya bernilai 0.
5. Matriks Transpose A(notasi A^t)

Matriks transpose diperoleh dengan mengubah baris matriks A menjadi kolom matriks pada matriks A^t

6. Matriks Simetri
   Jika Matriks tersebut adalah matriks bujur sangkar dan memenuhi hubungan $A=A^t$
7. Matriks 0
   Matriks yang semua unsurnya bernilai 0

2.2 Operasi matriks

1. Penjumlahan Matriks

Syarat agar dua matriks dapat dijumlahkan adalah ukuran kedua matriks haruslah sama baik baris maupun kolmnya. Penjumlahan dua matriks menghasilkan matriks yang berukuran sama dengan elemen-elemennya hasil dari penjumlahan unsur yang seletak pada kedua matriks

2. Perkalian Matriks

Matriks $A_{m \times n}$ dan $B_{p \times q}$ maka perkalian A x B hanya bias dilakukan jika n=p dan matriks hasilnya adalah matriks berukuran mxq. Dalam perkalian matriks tidak berlaku sifat komutatid yaitu AxB tidak sama dengan BxA

3. Operasi Baris Elementer (OBE)

Merupkan operasi baris Aritmtika (penjumlahan atau perkalian) yang dilakukan pada setiap elemen disuatu baris meliputi:

-Pertukaran Baris

-Perkalian suatu baris dengan konstanta tidak nol

-Penjumlahan hasil perkalian suatu baris dengan konstanta tidak nol dengan baris yang lain.

Dalam operasi OBE ada beberapa hal yang harus diperhatikam:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Bilangan 1 (pada baris pertama kolom pertama) dinamakan **satu utama**.
- Bilangan 2 pada baris ke-2 dinamakan **unsur pertama tak nol** dilihat di baris ke-2
- Baris pertama dan ke-2 dinamakan **baris tak nol**, karena pada baris tersebut memuat unsur tak nol.
- Baris ke-3 dinamakan **baris nol**, karena setiap unsur pada baris ke-3 adalah nol.

Tujuan dilakukan Operasi Baris Elementer pada suatu martiks adalah menghasilkan matriks yang memenuhi baberapa sifat berikut:

1. Pada baris tak nol maka unsur tak nol pertama adalah 1(satu utama)
2. Pada baris yang berurutan, baris yang lebih rendah membuat satu utama lebih kekanan
3. Jika ada bari 0 maka diletakkan dipaling bawah
4. Pada kolom yang memuat unsur 1 utama, maka unsur lainnya adalah 0.

Jika poin 1,2 dan 3 dipenuhi maka matriks hasil OBE dinamakan bentuk ***esilon baris*** (prosesnya dinamakan ***eliminasi Gauss***). Jika semua poin dipenuhi matriks dinamakan berbentuk ***esilon baris tereduksi*** (prosesnya dinamakan ***eliminasi Gauss-Jordan***).

2.3 Determinan Matriks

Determinan adalah pemetaan domain berupa matriks bujur sangkar .Determinan matriks sering digunakan dalam pengecekan atau pemerikasaan suatu matriks seperti memeriksa keberadaan invers matriks menentukan system persamaan lanjar. Determianan juga bisa digunakan dalam perhitungan invers matriks.

Determinan dapat dihitung dengan berbagai cara salah satunya dengan cara OBE dan metode ekspansi kofaktor. . notasi determinan dari matriks A adalah

$$\textbf{det (A)} \text{ atau } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \text{ atau } |A|$$

Dalam perhitungan Determinan menggunaan metode OBE, matriks hasil akhir OBE yang akan dicari adalah matriks Segitiga.Karena pada dasarnya determinan adalah hasil perkalian elem diagonal dari matriks segitiga. Secara gambaran proses yang dilakukan adalah sebagai berikut

Matriks bujur sangkar ~ OBE ~ matriks segitiga

Dikarenakan hal tersebut kita harus mengetahui pengaruh OBE terhadap hasil determinan suatu matriks yakni sebagai berikut:

1) Jika matriks A adalah adalah matriks B dengan salah satu barisnya ditukar maka Det(A)=-Det(B)
2) Jika B berasal dari A dengan perkalian sebuah baris dengan konstanta tidak nol *k* maka Det(B)=k.Det(A)
3) Jika matriks B berasal dari matriks A dengan penjumlahan dari baris yang telah dikalikan dengan konstanta tidak nol maka Det(B)=Det(A)

Dalam perhitungan Determinan dengan ekspansi kofaktor ada beberapa hal yang harus diperhatikan

(i) M_{ij} disebut **Minor-ij** yaitu determinan matriks A dengan menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j matriks A.

(ii) C_{ij} Matriks dinamakan **kofaktor –ij** yaitu $(1)^{i+j}M_{ij}$

Cara menghitung det(A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke i:

$\text{Det}(A)=a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$

Jika menggunakan sepanjang kolom ke-j maka cara menghitung Det(A):

$\text{Det}(A)= a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$

2.4 Matriks Invers

Jika A dan B adalah matriks bujur sangkar yang berukuran sama dan I adalah matriks isentitas. Jika AxB=I maka B dinamakan Invers A (berlaku sebaliknya). Dinotasika $A=B^{-1}$ atau $B=A^{-1}$

Untuk menghitung Invers dari sebuah matriks dapat diakukan melalui OBE yaitu dengan

(A | I) ~ (I | A)

Matriks A pada ruas kiri dikenakan OBE bersamaan degan matriks I sehingga matriks A akan berbuaha menjadi matriks Identitas dan matriks I akan menjadi invers dari A. Jika pada baris tersebut ditemukan baris nolmaka matriks A dikatakan tidak memiliki inveres atau disebut dengan **Matriks Singular**.

Selain dengan OBE invers matriks juga dapat digunakan dengan pembentukan matriks kofaktor.

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n2} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriks diatas merupakan **matriks kofaktor** dari matriks A. Tranpose matriks ini dinamakan **adjoin** A, dengan notasi *adj*(A).

Dengan matriks adjoin ini kita dapat menentukan invers matriks dari A misalkan maka:

$$A^{-1} = \frac{1}{Det(A)} Adj(A)$$

2.5 Sistem persamaan lanjar

Sistem persamaan linier/lanjar adalah sisitem persamaan yang memiliki 2 atau lebih persamaan linier. Persamaan ini berkaitan satu sama lain.Bentuk umum system persamaan lanjar/linier

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = u_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = u_2$$
$$.. \quad .. \quad .. \quad .. \quad ..$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = u_m$$

a_{mn} menyatakan konstanta peubah

x_n menyatakan peubah bebas

u_n menyatakan konstanta

Atau dapat juga dituliskan dalam persamaan perkalian matriks

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

AX=B

X adalah matriks peubah

A adalah matriks konstanta kiri

B adlaah matriks konstanta kanan

Suatu system persamaan linier/lanjar memiliki 3 kemungkinan solusi

a. Solusi Tunggal/trivia
b. Solusi tak hingga
c. Tidak memiliki solusi

Jika system persamaan lanjar memiliki 2-3 peubah kita masih bisa menyelesaikannya dengan metode biasa (eliminasi dan subtitusi) tetapi lebih dari itu sangatlah tidak effisien jika kita menggunakannya. Penyelesaian Sistem persamaan lanjar memiliki 2 metode penyelesaian

Pertama dengan metode Operasi bari Elementer. Yakni dengan cara menuliskan kembali persamaan tersebut dalam bentuk matriks yang diperbesar (*augmented matrix*) kemudian melakukan OBE jika ditemukan ada baris nol dan dibaris tersebut pada bagian matriks konstantanya adalah 0 juga maka **persamaan lanjar tersebut memiliki solusi tak hingga**, sedangkan jika bagian matriks konstantanya pada baris tersebut bukan 0 maka **persamaan lanjar tersebut tidak memiliki solusi.** Jika tidak ditemukan baris 0 maka **Sistem persamaan lanjar tersebut memiliki solusi tunggal**.

Cara Kedua menggunkan invers matriks dilakukan dengan cara menuliskan kembali persamaan dalam bentuka perkalian matriks seperti contoh karena bentuka perkalian matriks AX=B dan dengan sifat invers matriks dapat kita tuliskan bahwa $X=A^{-1}B$. dengan catatan matriks A memiliki invers. Jika matriks A tidak memiliki invers maka **persamaan lanjar tersebut tidak memiliki solusi**.

2.6 Sistem Persamaan Lanjar Homogen

Merupakan system persamaan linier/lanjar yang semua konstantanya adalah nol, sehingga bentuk umumnya adalah

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0$$

SPL homogen adalah Sistem persamaan yang konsisten jadi SPL ini selalu memiliki solusi tunggal di semua nilai peubah sama dengan 0 $\{x_1=x_2= .. =x_n=0\}$. Jika tidak SPL ini memiliki solusi tak hingga. Biasanya dituliskan dalam bentuk parameter.

III. STATISTIKA

Statistika adalah ilmu yang mempelajari suatu penduga bagi suatu parameter serta mengambil kesimpulan mengenai nilai parameter tersebut berdasarkan nilai yang didapat (Andi Hakim, Rambe 1993). Sedangkan statistic sendiri adalah kumpulan fakta yang umumnya berbentuk angkayang tersusun didalam table atau diagram yang menjabarkan suatu permasalahan. Statistika sendiri dibagi menjadi beberapa kelompok yaitu:

Statistika Deskriptif adalah statistika yang menggunakan kelompok untuk menarik kesimpulan tentang kelompok tersebut seperti ukuran lokasi,bentuk dan lain-lain.

Statistika Induktif/Inferensi adalah statistika yang menggunkan data sampel untuk menarik kesimpulan mengenai darimana populasi sampel itu berasal.

3.1 Aljabar Lanjar pada Metode Prediksi Statistika

Salah satu penerapan Aljabar lanjar di statistika adalah prediksi atau peramalan. Metode ini dapat dilakukan dengan 3 catatan yaitu memiliki data masa lalu dan diasumsikan beberapa aspek pola masa lalu akan terus berlanjut di masa mendatang dan data sudah dalam bentuk numerik.Berbagai macam metode

1. Metode Multiple Linier Regression

Peneliti pertama melakukan penelitian terhadap relasi antara variable independen dan dependen. Relasi tersebut akan membuat seseorang lebih akurat dalam memprediksi variable dependen dari pengetahuan independen. Tapi biasanya butuh lebih dari satu variable indenpenden. Bentuk umum Multiple Linier Regression ialah :

$Y = b_o + b_1X_1 + b_2X_2 + .. b_nX_n$

Dimana

Y= varabel dependen hasil peramalan

b : konstanta bebas

2. Metode Penyajian Data

Metode ini dapat menjadi dasar dalam pemecahan persoalan dalam metode regresi. Karena metode ini mengubah data-data independen yang didapat menjadi dalam bentuk system persamaan lanjar. Contoh penerapannya jika hubungan antara presentase kenaikan harga saham (A), kenaikan daya beli masyarakat (B) dan kenaikan hasil penjualan saham (Y) dengan demikian kita harus mencari regresi linier yang menggambarkan hubungan Y dengan variable B dan A dengan hasil data

Y	1	3	5	6	7
A	1	2	3	4	5
B	2	4	6	7	9

Apabila disubtitusikan dan ditabulasikan akan diperoleh persamaan linier simultan berikut

$5b_o+15b_1+28b_2=22$

$15b_o+55b_1+10b_2=81$

$28b_o+101b_1+186b_2=149$

3. Penyelesaian Dengan Invers Matriks

Persamaan lanjar yang didapat disusun di matriks bujur sangkar maka akan memenuhi :

$$\begin{bmatrix} n & \sum X_1 & \sum X_2 \\ \sum X_1 & \sum X_1^2 & \sum X_1X_2 \\ \sum X_2 & \sum X_2X_1 & \sum X_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Y \\ \sum X_1Y \\ \sum X_2Y \end{bmatrix}$$

Dari persamaan diatas maka matriks dapat dituliskan

$$\begin{bmatrix} 5 & 15 & 28 \\ 15 & 55 & 101 \\ 28 & 101 & 186 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 81 \\ 149 \end{bmatrix}$$

Dengan menghitung Determinan matriks tersebut adalah 15 maka

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15 & 28 \\ 15 & 55 & 101 \\ 28 & 101 & 186 \end{bmatrix}^{-1} \bullet \begin{bmatrix} 22 \\ 81 \\ 149 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{15}\begin{bmatrix} 29 & 38 & -25 \\ 38 & 146 & -85 \\ -25 & -85 & 50 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 22 \\ 81 \\ 149 \end{bmatrix}$$

Maka didapat b_o=-0,6 b_1=-0,2 dan b_3=1. Maka diperolehlah Regresi Linier Multiple untuk contoh persoalan tersebut $Y=-0,6-0,2X_1+X_2$

4. Penyelesaian dengan Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Matriks tersebut dapat diselesaikan dengan OBE atau Eliminasi Gauss dengan *Matriks Augmented*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 15 & 28 & 22 \\ 15 & 55 & 101 & 81 \\ 28 & 101 & 186 & 149 \end{array}\right)$$

Dengan melakukan OBE diperoleh matriks Esilon baris tereduksi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -0.6 \\ 0 & 1 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Karena tidak diperoleh baris yang 0 maka solusi tersebut tunggal dengan b_o=-0,6 b_1=-0,2 dan b_3=1

Sehingga dapat dibuat Regresi Linier Multiple.

IV. KESIMPULAN

Aljabar lanjar meliputi berbagai pembahasan seperti matriks, system persamaan lanjar, matriks dan transformasi lanjar. Banyak penerapan Aljabar lanjar diberbagai disiplin ilmu salah satunya adalah bidang statistika. Contohnya dalam metode prediksi Statistika yang menggunkan Sistem persamaan lanjar dan berbagai operasi matriks. Dengan menggunkan Aljabar Lanjar metode ini bisa diselesaikan lebih mudah dan cepat.

V. UCAPAN TERIMA KASIH

Puji Syukur kehadirat Allah SWT karena Rahmat dan Ridha NYA lah saya dapat menyelesaikan makalah ini dengan baik. Ucapan terima kasih juga saya ucapkan kepada dosen mata kuliah Aljabar Geometri Bapak Dr. Ir. Rinaldi Munir dan Bapak Drs.Judhi Santoso, M.Sc yang telah mengajar selama satu semester.

REFERENCES

[1] **http://adiwijaya**.staff.telkomuniversity.acid diakses 15 Desember 2015. .
[2] Howard Anton, *Elementary Linear Algebra*, 10th edition, John Wiley amnd Sons, 2010
[3] https://yudiagusta.files.wordpress.com/2009/11/157-162-knsi08-029-aplikasi-metode-numerik-dan-matrik-dalam-perhitungan-koefisien-koefisien-regresi-linier-multiple-untuk-peramalan diakses 15 Desember 2015.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 27 November 2013

ttd

Ade Surya Ramadhani 13514049