Aplikasi Matriks pada Pemodelan Permasalahan Ekonomi

(Leontief's Input-Output Model)

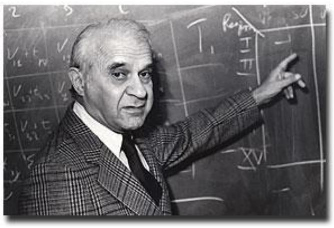
Fanda Yuliana Putri - 13514023
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
13514023@std.stei.itb.ac.id

***Abstract*—Pemodelan permasalahan ekonomi dengan menggunakan representasi matriks sudah banyak digunakan sejak awal abad ke-20. Salah satunya adalah pemodelan permasalahan ekonomi yang dibuat oleh pakar ekonomi asal German yang bernama Leontief. Ia berhasil memodelkan keterhubungan perubahan suatu sektor ekonomi terhadap sektor ekonomi lain dengan mengimplementasikan permasalahan tersebut kedalam bentuk matriks. Pemodelan milik Leontief ini kemudian dikenal dengan nama *Leontief's Input-Output Model*. Sampai saat ini, pemodelan jenis ini masih banyak digunakan untuk menganalisis konsidi perekonomian suatu wilayah dan menjadi dasar pemodelan-pemodelan lain yang digunakan di berbagai belahan dunia. Input-Output Model terbilang penyelesaian yang cukup sederhana dengan hasil yang baik.**

***Keywords*—Ekonomi, Input-Output, Matriks, Leontief's Model**

I. PENDAHULUAN

Dalam bidang perekonomian, seringkali dijumpai permasalahan-permasalahan yang rumit. Untungnya dari sekian banyak permasalahan ekonomi tersebut, tidak sedikit diantaranya yang dapat dipecahkan dengan cara merubahnya terlebih dahulu kedalam bentuk persamaan lanjar. Salah satu permasalahan yang dapat dipecahkan dengan persamaan lanjar adalah "bagaimana perubahan di satu sektor ekonomi dapat memengaruhi sektor lain?". Untuk itu seorang pakar ekonomi kelahiran German, 5 Agustus 1906 yang bernama Wassily Wassilyevich Leontief, merumuskan suatu model matematika untuk memecahkan permasalahan ekonomi tersebut.



Gambar 1. Wassily Wassilyevich Leontief
Sumber: http://www.iioa.org/

Pemodelan matematika yang diusung oleh Loentief memanfaatkan representasi matriks untuk menggambarkan kondisi sektor ekonomi tertentu. Matriks pada model tersebut berisi hubungan keterkaitan beberapa sektor perekonomian dalam suatu wilayah. Pemodelan tersebut kemudian dikenal dengan nama *Leontief's Input-Output Model*. Untuk memahami metode ini dalam menyelesaikan permasalahan perekonomian dibutuhkan pengetahuan dasar mengenai matriks dalam matriks eselon tereduksi dan/atau matriks balikan.

Dari hasil publikasi mengenai karyanya inilah, Leontief kemudian berhasil memenangkan penghargaan Nobel di bidang *Economic Science* pada tahun 1973 setelah ia berhasil memodelkan permasalahan ekonomi di Amerika Serikat menjadi 500 sektor ekonomi yang berbeda pada tahun 1930an [5].

Meskipun sederhana model milik Leontief ini merupakan senjata yang ampuh di bidang perekonomian. Kini *Input-Output Model* banyak dijadikan dasar bagi pemodelan-pemodelan lain di bidang ekonomi yang dipakai di berbagai belahan dunia [5]. Pemodelan ini dapat dipakai dan diaplikasikan dalam berbagai macam cakupan area, mulai dari bisnis kecil sampai permasalahan ekonomi yang menyangkut berbagai negara di dalamnya [5]. Tujuan utama dari Leontief Input-Output model adalah untuk menyeimbangkan banyaknya 'barang' yang diproduksi dengan total permintaan untuk produksi tersebut. Selain itu, pemodelan milik Leontief juga dapat digunakan untuk memanipulasi perekonomian dengan merubah variabel-variabel yang ada pada beberapa sektor ekonomi yang terlibat di dalamnya.

II. DASAR TEORI

1. Matriks

Matriks adalah larik yang berbentuk segi-empat dengan elemen berupa angka atau objek matematika lain yang dapat dikenai operasi matematika, contohnya pengurangan, perkalian, penjumlahan, dan lain-lain.[1].

Pada umumnya, sebuah matriks dalam bidang Z adalah larik segi-empat susunan skalar dari beberapa anggota dimana setiap anggota adalah bagian dari bidang Z.[2] Seperti contohnya matriks bilangan bulat, matriks bilangan riil atau matriks bilangan kompleks. Pada matriks bilangan bulat, setiap elemen pada matriks adalah anggota bilangan bulat. Matriks A dibawah ini merupakan salah satu contoh matriks bilangan bulat.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Semua bilangan, simbol, atau ekspresi yang terdapat di dalam matriks disebut sebagai entri/elemen [1]. Elemen horisontal pada sebuah matriks disebut baris, sementara elemen vertikal pada matriks disebut sebagai kolom [1].

1.1. Ukuran Matriks

Ukuran dari sebuah matriks didefinisikan sebagai banyaknya baris dan kolom yang ada. Contohnya matriks yang mempunyai jumlah baris sebanyak *m* buah dan kolom sebanyak *n* buah memiliki ukuran sebesar *m* × *n*.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Gambar 2. Matriks dengan Ukuran *m* x *n*
Sumber: http://lh5.ggpht.com/

Sebuah matriks yang mempunyai jumlah baris sama dengan jumlah kolom disebut sebagai matriks persegi. Sebuah matriks yang memiliki jumlah kolom atau jumlah baris atau jumlah kolom atau keduanya (baris dan kolom) yang tak ter-hingga disebut sebagai matriks tak-hingga. Sebuah matriks yang tidak memiliki elemen disebut sebagai matriks kosong. Dalam beberapa konteks, contohnya di program komputer aljabar, matriks kosong banyak dimanfaatkan.

1.2. Notasi Matriks

Pada umumnya, simbol yang digunakan untuk notasi matriks adalah huruf kapital (contohnya *A*, *B*, dst). Sementara huruf non-kapital digunakan untuk merepresentasikan elemen dari matriks (contoh a_{ij}, b_{ij}, dst). Dalam a_{ij}, i menandakan nomor baris dari elemen matriks, sementara j menandakan nomor kolom dari elemen matriks.

1.3. Matriks Identitas

Matriks identitas, dilambangakan dengan *I*, adalah matriks dengan elemen a_{ij}=0 untuk setiap i ≠ j dan a_{ij}=1 untuk setiap i = j.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gambar 3. Matriks Identitas
Sumber: http://2.bp.blogspot.com/

1.4. Matriks Transpose

Matriks transpose, dilambangkan dengan A^T, adalah matriks hasil pertukaran baris-baris dengan kolom-kolom pada matriks asal. Misalkan *A* memiliki ukuran *m* × *n*, maka A^T memiliki ukuran *n* × *m*. Dalam hal ini, jika b_{ij} adalah elemen matriks A^T, maka untuk setiap $b_{ji} = a_{ij}$.

1.5. Matriks Segitiga Atas dan Bawah

Matriks segitiga atas adalah matriks yang jika elemen-elemen di atas diagonal bernilai 0. a_{ij} = 0, jika i< j. Matriks segitiga bawah adalah matriks yang jika elemen-elemen di bawah diagonal bernilai 0. a_{ij} = 0 jika i>j. Matriks A dan B berturut-turut adalah contoh matriks segitiga atas dan segitiga bawah.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1.6. Operasi Aritmatika pada Matriks

1.6.1. Penjumlahan dan Pengurangan Dua Buah Matriks

Penjumlahan matriks *A* dan *B* hanya dapat dilakukan jika dan hanya jika kedua matriks tersebut memiliki ukuran yang sama, misalkan matriks *A* dan *B* sama-sama memiliki ukuran *m* × *n*. *A*+*B* (penjumlahan matriks *A* dengan matriks B) menghasilkan matriks baru, misal matriks *C* dengan ukuran *m* × *n*. Dalam hal ini untuk setiap elemen matriks *C* berlaku $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Untuk pengurangan dua buah matriks, berlaku aturan yang sama seperti pada penjumlahan, hanya perlu merubah operator + menjadi –.

1.6.2. Perkalian Dua Buah Matriks

Pada perkalian dua buah matriks *A* dan *B* hanya dapat dilakukan apabila jumlah kolom pada matriks pertama sama dengan jumlah baris pada matriks kedua, misalkan matriks *A* berukuran *m* × *n* dan matriks *B* berukuran *n* × *o*. *AB* (perkalian matriks *A* dengan matriks *B*) menghasilkan matriks baru, misal *C* dengan ukuran *m* × *o*. Dalam hal ini

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{j2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Dalam perkalian matriks, terdapat beberapa sifat yang perlu diketahui[7]:

1. Perkalian matriks tidak komutatif $AB \neq BA$
2. Berlaku hukum asosiatif $(AB)C=A(BC)$
3. Berlaku hukum distributif
   $A(B+C) = AB + AC$
   $(B+C)A = BA + CA$
4. Perkalian matriks A dengan matriks identitas I akan menghasilkan matriks A. $AI=A$.
5. Perpangkatan matriks didefinisikan sebagai,
   $A^0 = I$
   $A^k = AA...A$ sebanyak k kali
6. Matriks A merupakan matriks ortogonal jika $A^TA = AA^T = I$

1.6.3. Perkalian Sebuah Matriks dengan Skalar

Pada perkalian matriks A dengan skalar k (Ak), akan menghasilkan sebuah matriks baru, misal C, dengan setiap elemen matriks C berlaku $c_{ij} = a_{ij} \times k$.

1.7. Matriks Eselon Tereduksi

Matriks eselon tereduksi adalah matriks yang memenuhi beberapa karakteristik berikut [4]:

a. Semua baris-nol berada di bagian bawah matriks.
b. Elemen bukan-nol pertama dari setiap baris bukan-nol selalu berada lebih kanan daripada elemen pertama bukan-nol baris bukan-nol pada baris sebelumnya.
c. Semua elemen bukan-nol pertama pada baris bukan-nol adalah 1.
d. Semua elemen matriks diatas dan di bawah elemen pertama bukan-nol adalah 0.

Contoh, jika ada matriks A, maka matriks B adalah matriks eselon tereduksi dari matriks A.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 8 \end{array}\right) \quad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

S

Sumber: https://upload.wikimedia.org

1.8. Matriks Balikan

Matriks balikan, dilambangkan dengan A^{-1}, adalah sebuah matriks yang memenuhi persamaan $AA^{-1} = I$, dimana I adalah matriks identitas.

Sebuah matriks persegi memiliki balikan jika dan hanya jika determinan $|A| \neq 0$ [3]. Jika $|A| = 0$ maka A adalah matriks singular.

Contoh, jika ada matriks A , maka matriks B adalah matriks balikannya.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ -3 & 0 & -10 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & -1 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Sumber: http://ltcconline.net/

2. *Leontief's Input-Output Model*

Leontief's Input-Output Model adalah sebuah pemodelan untuk perekonomian sebuah negara atau daerah tertentu [6]. Asumsikan jika setiap industri dalam perekonomian mempunyai dua tipe permintaan [6]:

a. Permintaan dari luar (dari luar sistem)
b. Permintaan dari dalam (permintaan untuk sebuah industri yang diberikan oleh industri lain tetapi keduanya masih tergabung dalam satu sistem)

Leontief's Model dapat memodelkan keduan permintaan tersebut kedalam suatu matriks.

Terdapat dua jenis *Leontief's Model* yaitu Model tertutup dan Model Terbuka [6].

2.1. Model Tertutup

Asumsikan bahwa sebuah sistem perekonomian memiliki n buah industri (atau sektor) yang tidak saling bergantung satu sama lain $S_1, S_2, \dots, S_n$. Setiap industri akan mengonsumsi beberapa barang produksi yang diproduksi oleh industri-industri lain, termasuk barang produksinya sendiri (industri sumber energi juga memakai sebagian produksinya untuk menyuplai kebutuhan energinya sendiri). Sebuah perekonomian dikatan tertutup jika semua kebutuhannya terpenuhi dengan hasil produksinya sendiri (tidak ada barang produksi yang masuk atau keluar sistem).

Dslam sistem perekonomian yang termasuk sistem yang tertutup, total produksi untuk suatu industi S_i sama dengan total konsumsi sehingga ada dihasilkan sebuah persamaan:

$$a_{i,1}p_1 + a_{i,2}p_2 + a_{i,3}p_3 + \cdots + a_{i,n}p_n = p_i \qquad (1)$$

dengan

i =1, 2, 3, . . ., n

p_i = level produksi dari sebuah industri S_i

a_{ij} =jumlah unit yang diproduksi oleh industri S_i yang diperlukan untuk memproduksi satu unit oleh industri S_j.

$a_{ij}p_j$ = jumlah unit yang diproduksi oleh industri S_i dan dikonsumsi oleh industri S_j.

$a_{i,1} + a_{i,2} + a_{i,3} + \cdots + a_{i,n}p_n$= jumlah unit yang diproduksi oleh industri S_i.

Jika perekonomian kala itu seimbang, maka total produksi yang dari setiap industri harus sama dengan total konsumsi. Kasus tersebut memunculkan sebuah persamaan lanjar:

$$a_{1,1}p_1 + a_{1,2}p_2 + a_{1,3}p_3 + \cdots + a_{1,n}p_n = p_1$$
$$a_{2,1}p_1 + a_{2,2}p_2 + a_{2,3}p_3 + \cdots + a_{2,n}p_n = p_2$$
$$a_{3,1}p_1 + a_{3,2}p_2 + a_{3,3}p_3 + \cdots + a_{3,n}p_n = p_3$$

. . .
. . .
. . .

$$a_{n,1}p_1 + a_{n,2}p_2 + a_{n,3}p_3 + \cdots + a_{n,n}p_n = p_n$$

Persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$A\bar{P} = \bar{P} \qquad (2)$$
$$(I - A)\bar{P} = 0 \qquad (3)$$

A adalah matriks Input-Output, sementara
$\bar{P}$ adalah vektor produksi

2.2. Model Terbuka

Model Leontief Tertutup mendeskripsikan kasus jika tidak ada barang produksi yang masuk atau keluar dari sistem perekonomian. Tetapi dalam beberapa kasus, suatu sistem perekonomian harus memenuhi permintaan dari luar. Dalam model ini, misalkan b_i adalah permintaan ke-i dari indutri diluar sistem, p_i dan $a_{i,,j}$ sama dengan pada kasus model tertutup, maka

$$p_i = a_{i,1}p_1 + a_{i,2}p_2 + a_{i,3}p_3 + \cdots + a_{i,n}p_n + b_i \qquad (4)$$

dengan
i = 1, 2, 3, . . ., n
aturan lainnya sama dengan sistem tertutup.

menghasilkan sebuah sistem linear:

$$p_1 = a_{1,1}p_1 + a_{1,2}p_2 + a_{1,3}p_3 + \cdots + a_{1,n}p_n + b_1$$
$$p_2 = a_{2,1}p_1 + a_{2,2}p_2 + a_{2,3}p_3 + \cdots + a_{2,n}p_n + b_2$$
$$p_3 = a_{3,1}p_1 + a_{3,2}p_2 + a_{3,3}p_3 + \cdots + a_{3,n}p_n + b_3$$

. . .
. . .
. . .

$$p_n = a_{n,1}p_1 + a_{n,2}p_2 + a_{n,3}p_3 + \cdots + a_{n,n}p_n + b_n$$

bentuk di atas dapat dituliskan dalam matriks sehingga

$$\bar{P} = AP + \bar{B} \qquad (5)$$

A dan $\bar{P}$ sama dengan pada model tertutup, sementara $\bar{B}$ adalah vektor permintaan.

Salah satu cara untuk memecahkan sistem persamaan lanjar di atas adalah

$$\bar{P} = A\bar{P} + \bar{B}$$
$$\bar{P}\,(I - A) = \bar{B}$$
$$\bar{P} = (I - A)^{-1}\bar{B} \qquad (6)$$

Pada kasus di atas matriks $(I - A)$ seharusnya memiliki matriks balikan (jika $(I - A)$ bukan matriks singular, maka $(I - A)^{-1}$ disebut Leorntif Balikan), yang mungkin semua kasus memenuhi syarat ini. Jika, dalam kondisi tertentu, $(I - A)^{-1}$ memiliki elemen non-negatif dan komponen vektor $\bar{P}$ bernilai negatif, maka kondisi ini dapat diterima oleh model. Dalam kasus ini, S_i dikatakan produktif. Sebaliknya S_i dikatakan tidak produktif.

III. Contoh Penerapan Leontief's Input-Output Model pada Beberapa Permasalhan Ekonomi

1. Permasalahan sesuai dengan Model Terbuka [6]
   Contoh: Model Primitif dari Perekonomian di Kansas pada abad ke-19 [6].
   Terdapat sebuah data suatu sektor dalam perekonomian sederhana yang memenuhi persamaan lanjar berikut.

S	P	= C	+	E
pertanian	x	= 0,05 x + 0,5 y	+ 8000	
peternakan	y	= 0,1 x	+ 2000	

S = Sektor / industri
P = jumlah produksi sektor S
C = Konsumsi Internal
E = Permintaan dari luar
Pertanian, x dalam satuan ton.
Peternakan, y dalam satuan ton.

Langkah pertama adalah membuat bentuk persamaan lanjar di atas menyerupai bentuk persamaan (3). Dengan p_1 dan p_2 merupakan total produksi untuk sektor pertanian dan sektor peternakan berturut-turut, maka didapat vektor

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} 8000 \\ 2000 \end{pmatrix}$$

Persoalan di sini adalah menemukan nilai x dan y. Dapat dipecahkan dengan menggunakan persamaan (4).

$$\bar{P} = (I - A)^{-1}\bar{B}$$

$$\bar{P} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0 \end{pmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} 8000 \\ 2000 \end{pmatrix}$$

$$\overline{P} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0{,}95 & -0{,}5 \\ -0{,}1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8000 \\ 2000 \end{pmatrix}$$
$$\overline{P} = \begin{pmatrix} 10000 \\ 3000 \end{pmatrix}$$

Dari vekto produksi P, didapatkan p_1 = x= 10000 ton hasil pertanian dan p_2=y=3000 ton hasil peternakan. Data tersebut adalah estimasi terbaik agar sebuah permintaan terpenuhi dan tidak ada hasil produksi yang terbuang.

Dengan data yang lengkap, maka pola perekonomian pada suatu waktu dapat diprediksi dengan cara mengubah beberapa data. Sebagai contoh, dalam kasus di atas, permintaan dari luar mengalami penurunan sehingga menjadi

$$\overline{B}' = \begin{pmatrix} 7300 \\ 2500 \end{pmatrix}$$

maka,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = (I - A)^{-1}B' = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 1 & 9{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7300 \\ 2500 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 9500 \\ 3450 \end{pmatrix}$$

dari vektor $\overline{P}$ tersebut didapatkan p_1 = x = 9500 ton hasil pertanian dan 3450 ton hasil peternakan. Tanpa perlu merubah $(I – A)^{-1}$.

Untuk mendapatkan matriks A pada mdel ini, dapat dilakukan dengan persamaan

$$a_{ij} = \frac{a_{ij} p_j}{p_j} \qquad (5)$$

(keterangan sama dengan pada model tertutup)

Contoh permasalahan lain pada Model Tertutup milik Leontief adalah data perekonomian di Amerika pada tahun 1947 yang disajikan dalam tabel berikut (dalam satuan Milyar Dolar Amerika)[5].

	S_1	S_2	S_3	B
S_1	34,69	4,92	5,62	39,34
S_2	5,28	61,82	22,99	60,02
S_3	10,45	25,95	42,03	130,65
T	84,56	163,43	219,03	

Tabel 1. Data Perekonomian Amerika pada 1947

dengan
S_1 = Sektor agrikultur
S_2 = Sektor manufaktur
S_3 = Sektor pelayanan/jasa
B = Permintaan dari luar sistem
T = Total output kasar

Permasalahannya adalah menemukan mencari level produksi optimal yang dapat memenuhi permintaan dari setiap sektor dan permintaan akhir dari setiap sektor

Dari tabel diatas, dengan persamaan (5) dan (3) didapatkan

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}4102 & 0{,}0301 & 0{,}0257 \\ 0{,}0624 & 0{,}3783 & 0{,}1050 \\ 0{,}1236 & 0{,}1588 & 0{,}1919 \end{pmatrix}$$
$$\overline{B} = \begin{pmatrix} 39{,}34 \\ 60{,}02 \\ 130{,}65 \end{pmatrix}$$
$$(I - A) = \begin{pmatrix} 0{,}5898 & -0{,}0301 & -0{,}0257 \\ -0{,}0624 & 0{,}6217 & -0{,}1050 \\ -0{,}1236 & -0{,}1588 & 0{,}8081 \end{pmatrix}$$
$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}7200 & 0{,}1006 & 0{,}0678 \\ 0{,}2245 & 1{,}6768 & 0{,}2250 \\ 0{,}3073 & 0{,}3449 & 1{,}2921 \end{pmatrix}$$

maka

$$\overline{P} = (I - A)^{-1}\overline{B} \qquad (3)$$
$$\overline{P} = \begin{pmatrix} 1{,}7200 & 0{,}1006 & 0{,}0678 \\ 0{,}2245 & 1{,}6768 & 0{,}2250 \\ 0{,}3073 & 0{,}3449 & 1{,}2921 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 39{,}34 \\ 60{,}02 \\ 130{,}65 \end{pmatrix}$$
$$\overline{P} = \begin{pmatrix} 82{,}40 \\ 138{,}85 \\ 201{,}57 \end{pmatrix}$$

Dari vektor $\overline{P}$ dapat diketahui aproksimasi produksi optimal dari sistem perekonomian tersebut adalah p_1 = 82,40 , p_2=138,85, p_3=201,57.

2. Permasalahan sesuai dengan Model Tertutup
Misalkan dalam suatu sistem perekonomian, terdapat tiga negara yang terlibst, yakni S_1, S_2, dan S_3 [8]. Asumsi setiap barang hasil produksi dalam sistem perekonomian ini hanya dikonsumsi oleh ketiga negara tersebut (tanpa adanya barang hasil produksi yang keluar atau masuk sistem). Diketahui data-data berikut [8]:
   a. S_1 membelanjakan pemasukannya sebesar 25% untuk membeli produk domestik, 50% untuk mengimpor produk dari S_2, dan 25 % untuk mengimpor produk dari S_3.
   b. S_2 membelanjakan pemasukannya sebesar 40% untuk mengimpor produk dari S_1, 20% untuk membeli produk domestik, dan 40% untuk mengimpor produk dari S_3.
   c. S_3 membelanjakan pemasukannya sebesar 25% untuk mengimpor produk dari S_1, 50% untuk mengimpor dari S_2, dan 25% untuk membeli produk domestik.

Permasalahannya adalah berapa rasio pemasukan dari ketiga negara tersebut? (asumsi ketiga negara memakai mata uang yang sama)

Dari data perekonomian yang ada, dapat dibuat sebuah matriks dimana a_{ij} merupakan pemasukan yang diperoleh oleh negara pada baris ke-i oleh negara pada kolom ke-j.

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{2}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{5} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \end{array}$$

$$(I - A)\bar{P} = 0 \qquad (3)$$

$$(I - A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{2}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{5} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} 4t \\ 5t \\ 4t \end{pmatrix}, \ t > 0.$$

Maka dapat diketahui dari vektor $\bar{P}$ jika rasio perbandingan pemasukan ketiga negara tersebut adalah 4 : 5 : 4.

IV. KESIMPULAN

Matriks dapat digunakan untuk memodelkan beberapa permasalahan ekonomi dan membuatnya lebih mudah untuk sipecahkan.

V. TERIMA KASIH

Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada Tuhan YME yang senantiasa melimpahkan rahmat serta hidayahnya sehingga penulis tidak mengalami kendala yang cukup berarti pada saat proses pembuatan makalah ini. Selanjutnya, penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Rinaldi M dan Bapak Judhi selaku dosen pembimbing dalam pembuatan makalah ini.

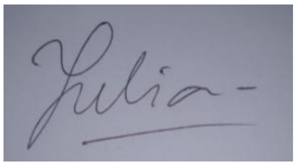
REFERENCES

[1] Lang 2002
[2] Fraleigh (1976, p. 209), Nering (1970, p. 37)
[3] Lipschutz, S. "Invertible Matrices." *Schaum's Outline of Theory and Problems of Linear Algebra, 2nd ed.* New York: McGraw-Hill, pp. 44-45, 1991.
[4] Nakos, G. and Joyner, D. *Linear Algebra with Applications.* Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, pp. 15-17, 1998.
[5] Gerald, Application to Economics : Leontief Model, https://www.math.ksu.edu/~gerald/leontief.pdf
[6] Leontief Model Mod, http://mathfaculty.fullerton.edu/
[7] Rinaldi Munir, “Diktat Kuliah Matematika Diskrit”, III, Bandung, 2003
[8] Leontief Model, http://www.math.wustl.edu/~freiwald/leontief.pdf

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 14 Desember 2015



Fanda Yuliana Putri - 13514023