Aplikasi Matriks, SPL, dan Interpolasi dalam Perhitungan Luas Prasasti

Robert Sebastian Herlim / 13514061[1]
Program Studi Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
[1]*13514061@std.stei.itb.ac.id*

***Abstrak*—Prasasti merupakan peninggalan Indonesia yang memiliki nilai yang tinggi, baik dalam aspek seni, maupun dalam aspek sejarah. Hal yang menarik dari sebuah prasasti adalah bentuk dari prasasti yang tak jarang ditemui merupakan bentuk yang tidak beraturan. Bentuk yang unik ini menimbulkan sebuah model permasalahan baru, yaitu menghitung luas permukaan prasasti. Dalam makalah ini, akan dibahas beberapa metode untuk menghitung luas permukaan prasasti dengan memanfaatkan tipe data matriks. Metode-metode tersebut tak lain adalah pemindaian secara langsung bayangan prasasti ke matriks, interpolasi dan integrasi, serta dengan pendekatan geometri yaitu dengan mengidentikan bentuk unik prasasti sebagai sebuah bentuk poligon tertutup sembarang.**

***Kata kunci*—interpolasi, luas, matriks, prasasti.**

I. Pendahuluan

Indonesia terkenal dengan bermacam-macam peninggalan bersejarah, karena Indonesia cukup berperan dalam penyebaran kebudayaan Hindu-Buddha di dunia. Banyak kerajaan besar Hindu-Buddha dan Islam yang dulunya menguasai wilayah perairan Nusantara. Peninggalan-peninggalan tersebut bermacam-macam, mulai dari candi, prasasti, tugu, kitab, perhiasan, dan lain-lain. Sebagai generasi muda, kita wajib melestarikan serta merawat peninggalan-peninggalan tersebut dengan segenap hati.

Peninggalan yang cukup banyak dan menarik adalah prasasti. Prasasti adalah sebuah tulisan yang ditulis di atas batu. Prasasti prasejarah di wilayah Nusantara ditulis dalam askara serta bahasa-bahasa asli Nusantara, seperti bahasa Sanskerta. Biasanya, isi dari prasasti adalah suatu perjanjian antara 2 pihak atau lebih, suatu bentuk tanda kemenangan sebuah kerajaan, bukti sebagai hutang-piutang, atau bahkan berisi tentang sebuah kutukan atau sumpah.

Masalah yang cukup menarik yang bisa dipetik dari prasasti adalah bagaimana cara untuk menghitung luas prasasti, apabila prasasti tersebut bukanlah bentuk yang simetris dan teratur. Hal ini cukup menarik sebab menghitung luas dari prasasti tidak semudah memasukan prasasti tersebut ke dalam air untuk menghitung volume nya. Banyak hal yang bisa dipelajari dari permasalahan menghitung luas prasasti.

Dalam makalah ini, akan dibahas bagaimana cara menghitung luas dari prasasti dalam beberapa metode, yaitu metode scanning langsung terhadap prasasti, metode interpolasi derajat banyak, dan dengan pendekatan geometris.

II. Dasar Teori

A. Sistem Persamaan Lanjar

Sistem persamaan lanjar merupakan suatu permasalahan matematika yang sering kali dijumpai di berbagai bidang ilmu pengetahuan, karena menjadi dasar pencarian solusi dari suatu masalah. Suatu sistem persamaan dikatakan lanjar apabila tiap sukunya mengandung maksimum sebuah variabel tunggal. Hal ini dikatakan lanjar karena dapat digambarkan sebagai garis lurus di sistem koordinat kartesius. [1]

Bentuk standar satu persamaan dari suatu sistem persamaan lanjar adalah

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

dengan *n* merupakan jumlah variabel yang terdapat pada sistem persamaan lanjar tersebut, dan a_1, a_2, ... a_n merupakan konstanta pengali tiap-tiap variabel.

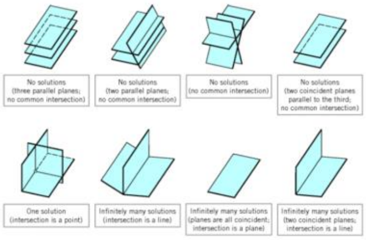
Untuk mencari solusi dari suatu sistem persamaan lanjar, salah satu caranya yaitu dengan menggunakan metode eliminasi Gauss atau metode eliminasi Gauss-Jordan, yaitu dengan mengubah suatu sistem persamaan lanjar menjadi ke dalam bentuk *augmented matrix* dan dengan menggunakan operasi baris elementer diubah menjadi bentuk *matriks eselon* atau *matriks eselon tereduksi*.

Beberapa aturan yang diperbolehkan selama melakukan operasi baris elementer terhadap *augmented matrix* antara lain

1. Mengalikan sebuah baris dengan konstanta tidak nol
2. Menukar 2 buah baris
3. Menjumlahkan sebuah baris dengan *k* kali baris yang lain.

Berdasarkan banyak solusi yang memenuhi, sistem persamaan lanjar dapat dikategorikan menjadi 3, yaitu

1. SPL dengan solusi unik (tunggal)
2. SPL dengan solusi banyak (tak berhingga)
3. SPL yang tidak memiliki solusi



Gambar 1 Visualisasi jenis-jenis SPL berdasarkan jumlah solusinya (sumber : Elementary linear algebra by anton, rorres 10th ed.)

B. Matriks

Matriks adalah sebuah tipe data yang merupakan larik dua dimensi yang berisi elemen-elemen skalar dan disusun dalam baris-baris dan kolom-kolom. Sebuah matriks dikatakan memiliki ukuran $m \times n$ apabila memiliki *m* baris dan *n* kolom.

Beberapa jenis matriks yang digunakan dalam penyelesaian sistem persamaan lanjar menggunakan metode *eliminasi Gauss* dan *eliminasi Gauss-Jordan* antara lain

1. *Augmented matrix*, adalah matriks yang memiliki ukuran $m \times (n+1)$, dengan *m* merupakan jumlah persamaan dalam sistem persamaan lanjar, dan *(n+1)* merupakan jumlah variabel yang ada pada sistem persamaan lanjar, ditambah dengan sebuah kolom yang berisi konstanta yang bukan pengali variabel. Sebagai contoh, apabila terdapat sebuah sistem persamaan lanjar

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered}$$

   akan diubah menjadi sistem persamaan matriks

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

   dan kemudian diubah menjadi *augmented matrix*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

2. *Matriks eselon,* adalah matriks hasil eliminasi Gauss sebuah *augmented matrix*, dimana sebuah matriks eselon memiliki sifat-sifat, antara lain
   - jika sebuah baris tidak seluruhnya 0, maka bilangan tak nol pertama adalah 1, yang akan disebut sebagai *satu utama*
   - jika ada baris yang seluruhnya 0, maka baris tersebut akan ditampakkan pada bagian bawah matriks eselon
   - pada dua baris berurutan, letak *satu utama* baris yang lebih bawah harus lebih menjorok ke kanan daripada satu utama baris di atasnya.

3. *Matriks eselon tereduksi*, adalah matriks hasil eliminasi Gauss-Jordan dari sebuah *augmented matrix*, atau merupakan matriks eselon yang dilakukan operasi baris elementer tambahan. Sebuah matriks eselon tereduksi memiliki sifat-sifat dasar dari matriks eselon dengan sifat tambahan yaitu jika ada *satu utama* pada suatu kolom, maka bagian atas dan bagian bawah *satu utama* pada kolom tersebut harus 0. [2]

C. Interpolasi Polinom

Interpolasi polinom merupakan salah satu aplikasi dari sistem persamaan lanjar, yaitu pencarian sebuah polinomial yang melewati titik-titik yang diberikan. Tujuan dari interpolasi antara lain untuk mencari aproksimasi nilai yang tidak tercantum pada data yang diberikan apabila tidak diketahui fungsi polinomial penyusunnya. Bentuk umum polinomial hasil interpolasi adalah

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

Beberapa jenis interpolasi polinomial antara lain

1. *interpolasi lanjar*, apabila hanya diberikan 2 buah titik sebagai data, maka interpolasi akan menghasilkan sebuah garis lurus.
2. *interpolasi kuadratik*, apabila hanya diberikan 3 buah titik sebagai data, maka interpolasi akan menghasilkan sebuah kurva parabolik.
3. *interpolasi kubik*, apabila hanya diberikan 4 buah titik sebagai data.
4. *interpolasi derajat n*, apabila diberikan *n+1* buah titik sebagai data.

Cara untuk mencari fungsi interpolasi dari *n* buah titik adalah dengan menyusun sistem persamaan lanjar dari persamaan polinomialnya.

$$\begin{gathered} a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_{n-1}x_1^{n-1} = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_{n-1}x_2^{n-1} = y_2 \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_{n-1}x_n^{n-1} = y_n \end{gathered}$$

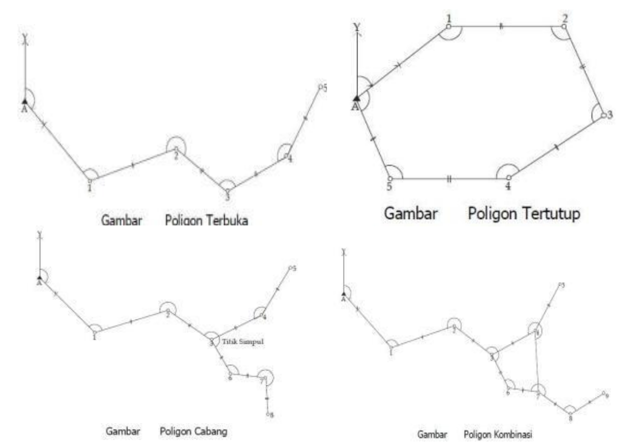
maka dengan menyelesaikan SPL di atas, akan didapatkan sebuah solusi yaitu a_0, a_1, a_2, ... , a_{n-1} yang tak lain merupakan konstanta-konstanta penyusun polinom. [2]

D. Poligon

Poligon adalah sebuah bangun datar yang memiliki sejumlah sisi. Berdasarkan bentuknya, poligon dapat dikategorikan menjadi 3, yaitu

1. *Poligon terbuka*, adalah poligon yang titik awal dan titik akhirnya tidak sama
2. *Poligon tertutup/kring*, adalah poligon yang titik awal dan titik akhirnya berada di titik yang sama
3. *Poligon bercabang*, adalah poligon yang memiliki satu atau lebih simpul cabang.

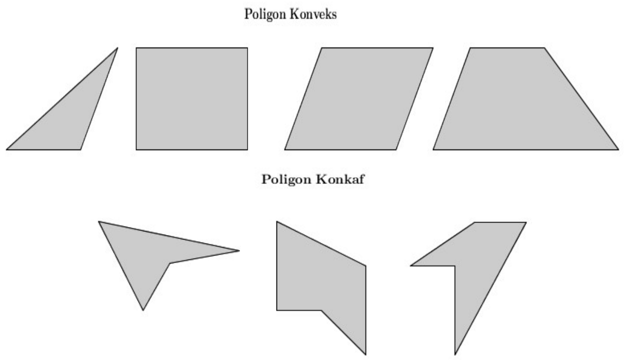
4. *Poligon kombinasi*, adalah poligon yang merupakan kombinasi dari satu atau lebih poligon. [3]



Gambar 2 Poligon berdasarkan bentuknya (sumber : https://tianjemeduson.wordpress.com/2012/10/08/pengantar-ilmu-ukur-tanah-poligon/ diakses pada 8 Desember 2015 pukul 21.00 GMT +7)

Berdasarkan kekonveksan poligon, poligon dapat dikategorikan menjadi 2, yaitu

1. *Poligon konveks*, adalah poligon yang sudut dalam tiap titik sudut nya lebih kecil dari 180º.
2. *Poligon konkaf*, adalah poligon yang memiliki minimal sebuah titik sudut yang sudut dalam nya lebih besar dari 180º.



Gambar 3 Poligon berdasarkan kekonveksan(sumber : http://www.mathdofer.com/admin/PDF/BidangDatar.pdf diakses pada 8 Desember 2015 pukul 22.15 GMT +7)

III. METODE PERHITUNGAN LUAS PRASASTI DENGAN MENGGUNAKAN MATRIKS

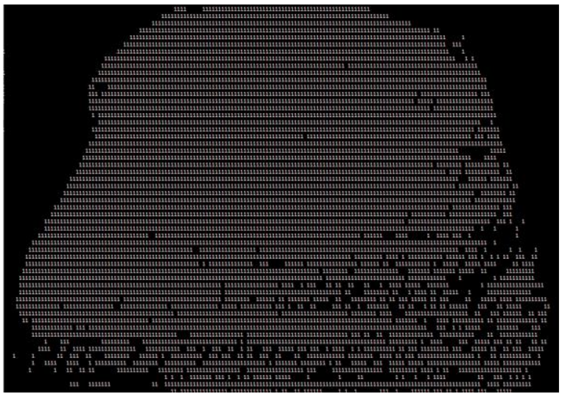
A. Dengan Pemindaian Bayangan Prasasti secara Langsung ke Matriks

Metode ini merupakan metode yang paling naif. Dalam pendekatan dengan menggunakan metode ini, prasasti langsung dilakukan pemindaian dengan sebuah mesin pemindai. Hasil pemindaian tersebut kemudian dilakukan konversi menjadi sebuah matriks, berupa matriks yang menampung nilai boolean. Matriks hasil seharusnya merupakan matriks yang berukuran besar, dimana tiap komponen akan merepresentasikan suatu unit luas dengan besar 1.

Apabila mesin pemindai mendeteksi bayangan prasasti pada suatu titik, maka $a_{ij} = true$. Sebaliknya, apabila mesin pendeteksi tidak mendeteksi apapun pada titik tersebut, maka $a_{ij} = false$

Setelah proses pemindaian selesai, artinya sudah ada matriks hasil pemindaian prasasti. Luas total bayangan prasasti yang ada pada matriks tersebut dapat dengan mudah dihitung dengan cara menghitung jumlah komponen matriks yang bernilai *true*.

Gambar 4 Contoh prasasti yang akan dipindai yaitu Prasasti Kawali (sumber : http://wwwpedulimuseum.blogspot.co.id/2012/11/prasasti-kawali.html diakses pada 8 Desember 2015 pukul 11.01 GMT+7)



Gambar 5 Contoh hasil pemindaian dari prasasti Kawali (dipindai dengan aplikasi pemindai gambar berbasis web http://www.text-image.com/ pada 8 Desember 2015 pukul 11.12 GMT +7)

Ditinjau dari gambar 5, pemindaian, dapat dilihat masih ada beberapa komponen matriks yang seharusnya bernilai *true* namun tidak bernilai *true*. Hal ini disebabkan oleh galat pemindaian, karena tidak semua bayangan prasasti dapat dibaca dengan baik oleh pemindai.

B. Dengan Interpolasi Derajat Banyak dan Integrasi Polinomial

Metode lain yang ingin ditunjukan yaitu dengan interpolasi derajat banyak dan integral. Interpolasi merupakan salah satu pendekatan secara numerik yang digunakan untuk mencari nilai fungsi polinomial yang akan melewati titik-titik yang diberikan. Hal ini dapat dilakukan algoritma eliminasi Gauss atau eliminasi Gauss-Jordan untuk menghasilkan matriks eselon atau matriks eselon tereduksi.

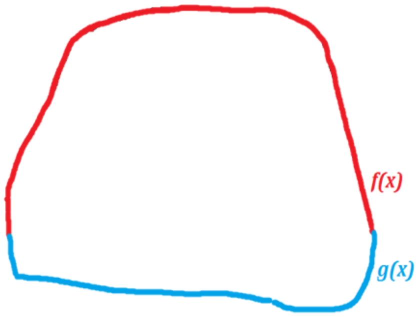
Sebuah prasasti dapat dipandang sebagai sebuah objek dengan fungsi polinomial yang tak beraturan sebagai penyusun garis luar dari objek tersebut, sehingga yang perlu dilakukan adalah mencari himpunan titik-titik pada prasasti yang menyusun garis terluar pada prasasti. Titik-titik yang perlu dibuat harus cukup banyak dengan jarak antar titik sekecil mungkin, namun tetap berhingga. Hal ini dilakukan supaya luas yang diperoleh bisa se-eksak mungkin dengan galat sekecil-kecilnya.

Gambar 6 Pengumpulan titik-titik penyusun garis terluar Prasasti Kawali (sumber : http://wwwpedulimuseum.blogspot.co.id/2012/11/prasasti-kawali.html diakses pada 8 Desember 2015 pukul 11.01 GMT+7)

Apabila sudah didapatkan sebuah himpunan titik-titik yang menyusun garis tepi prasasti, kita perlu mencari fungsi penyusun garis tepi bagian atas dan fungsi penyusun garis tepi bagian bawah dari prasasti tersebut.

Gambar 7 Pemisahan batas atas dan batas bawah garis tepi prasasti Kawali (sumber : http://wwwpedulimuseum.blogspot.co.id/2012/11/prasasti-kawali.html diakses pada 8 Desember 2015 pukul 11.01 GMT+7)

Setelah melalui tahap ini, akan didapat sebuah fungsi polinomial penyusun kurva bayangan prasasti bagian atas dan bagian bawah. Untuk menghitung luas prasasti yang merupakan luas daerah yang diapit oleh kedua kurva, cara yang paling trivial adalah dengan mengintegralkannya terhadap *dx*.



Gambar 8 Visualisasi fungsi kurva bagian atas dan bawah prasasti Kawali

Berdasarkan gambar 9, maka luas daerah yang diapit oleh fungsi *f(x)* dan *g(x)* dapat dihitung dengan cara

$$Luas = \int_{x_0}^{x_1} f(x) - g(x)\, dx$$

dengan x_0 adalah nilai absis dari titik yang berada di paling kiri dan x_1 adalah nilai absis dari titik yang berada di paling kanan. Namun, karena *f(x)* dan *g(x)* merupakan fungsi polinomial dengan derajat yang besar, maka untuk perhitungan fungsi tersebut perlu menggunakan teori bilangan lainnya seperti *modular exponentation* (atau algoritma optimasi tingkat lanjut lainnya), supaya tidak terjadi *overflow*.

C. Dengan Pendekatan Geometri

Metode terakhir yang ingin ditunjukan, yaitu metode yang memanfaatkan *The Surveyor's Area Formula* atau *Shoelace Formula*. Rumus tersebut digunakan untuk menghitung luas dari sebuah polygon sederhana yang diketahui titik-titik sudut nya. Hal ini dapat dilakukan karena semua benda di dunia ini sebenarnya adalah sebuah polygon tertutup, termasuk prasasti yang bentuknya tidak beraturan. Poligon sederhana merupakan poligon yang tertutup, baik poligon konveks maupun konkaf.

Langkah pertama yang perlu dilakukan sama seperti metode kedua, yaitu mengumpulkan himpunan titik-titik penyusun tepi luar dari prasasti. Hal ini bisa dilakukan dengan mesin pemindai.

Langkah berikutnya, nilai titik-titik tersebut dimasukkan ke dalam rumus *Shoelace* [4] untuk menghitung luas poligon yaitu

$$Luas = \frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times \left(\sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix} \right)$$

dengan x_{i+1} dan y_{i+1} merupakan x_1 dan y_1 dan $|A|$ merupakan notasi untuk menghitung determinan dari matriks *A*.

Metode ini sepertinya paling baik dibandingkan dengan 2 metode lainnya. Hal ini disebabkan karena alat komputasi hanya perlu menghitung determinan dari matriks yang berukuran 2x2 sebanyak *n* kali, dengan *n* merupakan jumlah titik. Karena determinan matriks 2x2 dapat dihitung dengan *ad* – *bc*, maka kompleksitas algoritma untuk metode ini dapat dinyatakan dalam *waktu lanjar O(n)*.

IV. KESIMPULAN

Pada bagian terakhir ini, dapat disimpulkan bahwa ketiga metode perhitungan luas prasasti memiliki keunggulan dan kelemahan masing-masing. Pemilihan metode yang paling memungkinkan merupakan pilihan pengguna, karena ketiga metode memiliki kasus khusus dimana suatu metode lebih unggul daripada yang lain.

Dengan adanya makalah ini, penulis berharap pembaca mengerti bahwa aplikasi matriks bukan sekedar hanya untuk menyelesaikan sistem persamaan lanjar atau untuk dicari determinannya, namun masih banyak lagi aplikasi matriks dalam kehidupan sehari-hari.

V. UCAPAN TERIMA KASIH

Pertama-tama, penulis ingin panjatkan puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa karena atas berkat, rahmat, dan penyertaan-Nya penulis dapat menyelesaikan makalah ini dengan baik dan tepat waktu. Penulis juga ingin berterima kasih kepada dosen pengampu mata kuliah IF2123 Aljabar Geometri yaitu Drs. Judhi Santoso, M.Sc dan Dr. Ir. Rinaldi Munir yang sudah dengan sabar dan tekun memberikan materi di kelas kepada penulis sehingga penulis dapat menulis makalah ini berdasarkan materi-materi yang ada di kelas. Tak lupa, penulis juga ingin mengucapkan terima kasih kepada teman-teman penulis yang tak bisa disebutkan namanya satu per satu, karena sudah menjadi teman yang baik dan selalu mendukung penulis selama penulis duduk di bangku kuliah semester 3.

REFERENCES

[1] http://staff.uny.ac.id/sites/default/files/131930136/KomputasiNumerikBab2.pdf
[2] Anton, Howard, *Elementary Linear Algebra 10th Edition.* Chapter 1.
[3] https://tianjemeduson.wordpress.com/2012/10/08/pengantar-ilmu-ukur-tanah-poligon/
[4] http://mathforum.org/library/drmath/view/73182.html

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 9 Desember 2015

Robert Sebastian Herlim
13514061