

Penerapan Aljabar Lanjar pada Grafis Komputer

Joshua Atmadja 13514098¹

Program Studi Teknik Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

¹joshuatmadja@gmail.com

Abstrak—Salah satu komponen penunjang komputer ialah grafis komputer. Grafis komputer berhubungan dengan imaji atau rupa. Grafis dapat berpindah tempat, dapat diperbesar atau diperkecil, dapat diputar, bahkan dapat berganti warna. Pada dasarnya, grafis tersebut ditampilkan oleh komputer dalam bentuk dua dimensi. Pemrosesan grafis komputer tersebut tidak lepas dari penggunaan aljabar lanjar. Makalah ini membahas tentang grafis komputer dan penerapan aljabar lanjar dalam memproses grafis komputer tersebut sesuai dengan kemauan pengguna.

Kata kunci—aljabar lanjar, dimensi, grafis komputer, warna

I. PENDAHULUAN

Komputer merupakan fasilitas penunjang produktivitas yang hampir digunakan oleh seluruh penduduk dunia. Dewasa ini, komputer banyak digunakan untuk mempermudah pekerjaan, seperti mengolah kata, mengolah angka, mengolah data, dan mengolah gambar. Sudah banyak prasarana dalam bentuk perangkat lunak yang diciptakan dan dipublikasikan oleh berbagai pengembang perangkat lunak sehingga fungsi komputer semakin banyak dan semakin mempermudah pekerjaan manusia.

Komputer memiliki banyak komponen penunjang, salah satunya ialah layar antar muka. Layar antar muka adalah penunjang yang penting dan sangat berpengaruh terhadap keberjalanan dan kebergunaan komputer. Tanpa layar antar muka, komputer menjadi tidak berguna. Layar antar muka menghubungkan pengguna (*brainware*) dengan komputer (*hardware* dan *software*) sehingga pengguna dapat mengoperasikan komputer dengan baik lewat tampilan antar muka.

Dewasa ini, tampilan antar muka terus diperbaharui untuk memudahkan pengguna mengoperasikan komputer. Secara garis besar diawali dengan tampilan teks, tampilan grafis 2 dimensi monokromatis, tampilan grafis 2 dimensi kromatis 4-bit, tampilan grafis 2 dimensi kromatis 8-bit, tampilan grafis 2 dimensi kromatis 16-bit, tampilan grafis 3 dimensi kromatis 16-bit, tampilan grafis 3 dimensi kromatis 24-bit, hingga tampilan grafis 4 dimensi (grafis alami) dengan kromatis 32-bit (ditambah dengan warna kuning). Tampilan yang sekarang banyak beredar ialah tampilan 3 dimensi kromatis 24-bit.

Grafis komputer ditampilkan dalam rupa dua dimensi.

Artinya, grafis komputer dua dimensi dan tiga dimensi akan tetap diproyeksikan ke ruang dua dimensi dan ditampilkan ke layar antar muka. Tentu saja grafis komputer tersebut dapat diproses untuk digeser, diperbesar/diperkecil, diputar, dan diubah warnanya sesuai dengan kebutuhan dan keinginan penggunanya. Selain perubahan posisi, grafis komputer juga dapat diubah warna dan bentuknya.

Dalam makalah ini, penulis akan menerapkan aljabar lanjar dalam pemrosesan grafis komputer untuk digeser, diperbesar/diperkecil, diputar, diubah bentuknya, dan diubah warnanya.

II. LANDASAN TEORI

A. Matriks dan Operasinya

Matriks adalah sekumpulan angka yang dibentuk dalam larik segi empat. Angka-angka di dalam sebuah matriks dinamakan entri/elemen. [1] Notasi matriks pada umumnya ialah dalam bentuk kumpulan angka menyerupai tabel dan diapit oleh dua buah tanda kurung () atau []. Biasanya, matriks diberi notasi dengan huruf kapital $A, B, C, \dots, M, \dots, Z$ sedangkan entrinya dinotasikan dengan huruf kecil a, b, c, d, \dots, z .

Berikut adalah contoh matriks.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad [0 \ 1 \ 0], \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks pertama berukuran 2×2 yang berarti matriks tersebut memiliki ukuran 2 baris dan 2 kolom. Dengan aturan yang sama, matriks kedua berukuran 1×3 dan matriks ketiga berukuran 3×3 . Entri yang berada di matriks A pada baris i dan kolom j dinotasikan dengan a_{ij} .

Secara umum, matriks A 3×4 dituliskan sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

dan matriks umum $m \times n$ dituliskan sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

atau dapat dituliskan

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \text{ atau } A = [a_{ij}]$$

Entri pada matriks tersebut juga umumnya ditulis dengan notasi

$$(A)_{ij} = a_{ij}$$

Dua buah matriks dikatakan sama ketika kedua matriks tersebut berukuran sama dan entri kedua matriks yang berkorespondensi (bersesuaian) bernilai sama. [1] Maka, matriks A dan matriks B dimana

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

dikatakan sama ketika matriks A dan matriks berukuran sama dan $a_{ij} = b_{ij}$.

Operasi pada matriks yang akan digunakan untuk pembahasan masalah pada makalah ini antara lain penjumlahan matriks, pengurangan matriks, perkalian skalar, dan perkalian matriks. Pada penjumlahan dan pengurangan dua matriks, syarat harus dua buah matriks tersebut ialah sama ukuran. Bila matriks A dan B berukuran sama, maka $A + B$ dicari dengan menambahkan entri di matriks B dengan entri yang berkorespondensi di matriks A, dan $A - B$ dicari dengan mengurangkan entri di matriks B dengan entri yang berkorespondensi di matriks A. [1] Dalam notasi singkatnya,

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$(A - B)_{ij} = (A)_{ij} - (B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Pada perkalian skalar, dimana A adalah matriks dan c adalah konstanta skalar, maka cA didapatkan dengan mengalikan seluruh entri di matriks A dengan skalar c. [1] Dalam notasi singkatnya,

$$(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}$$

Pada perkalian dua matriks, misal matriks A dan matriks B, maka berlaku bahwa jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$, maka AB adalah matriks $m \times n$. Untuk mencari entri matriks AB di baris i dan kolom j , perhatikan saja baris ke- i di matriks A dan kolom ke- j di matriks B. Kalikan masing-masing entri yang berkorespondensi kemudian jumlahkan dengan hasil perkalian entri yang berkorespondensi lainnya. [1] Dalam notasi singkatnya,

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$$

Operasi matriks tunggal yang akan digunakan juga pada makalah ini ialah transpos matriks dan invers matriks (dibahas setelah penjabaran bentuk khusus matriks)

Matriks transpos ialah matriks hasil pertukaran entri baris dan kolom dari matriks asalnya. Dengan kata lain, bila M adalah matriks $m \times n$, maka M^T adalah matriks transpos yang berukuran $n \times m$ yang isinya adalah hasil pertukaran baris dan kolom matriks M ; artinya, kolom pertama M^T adalah baris pertama M , kolom kedua M^T adalah baris kedua M , dan seterusnya. Dalam bentuk notasi singkat,

$$(M^T)_{ij} = (M)_{ji}$$

Beberapa bentuk khusus matriks antara lain matriks bujur sangkar, matriks segitiga atas, matriks segitiga bawah, dan matriks diagonal.

Matriks bujur sangkar adalah matriks yang memiliki banyak baris dan banyak kolom yang sama. Contoh matriks bujur sangkar ialah sebagai berikut.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \\ 9 & 13 & 4 \end{bmatrix}$$

Secara umum, jika matriks M berukuran $m \times n$ memiliki, matriks M dikatakan matriks bujur sangkar bila $m = n$. Dengan kata lain, matriks bujur sangkar M memiliki ukuran $n \times n$ dengan n adalah bilangan bulat positif. Nilai n pada matriks M juga dapat disebut ordo matriks.

Matriks diagonal ialah matriks bujur sangkar dimana entri pada diagonal utamanya bernilai tidak nol, sedangkan entri lainnya bernilai nol. [1] Contoh matriks diagonal ialah sebagai berikut.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Secara umum, bila D adalah matriks diagonal berordo n , maka

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

dimana d_i tidak nol dengan $i = [1, n]$. Matriks diagonal yang entri tak nolnya bernilai 1 untuk semua entri dinamakan matriks identitas I .

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notasi I_n menandakan matriks identitas berordo n .

Matriks I digunakan juga untuk mencari invers matriks. Pada dasarnya, bila M adalah matriks bujur sangkar, dan N adalah matriks yang berukuran sama dengan M , serta $MN = NM = I$, maka M memiliki invers dan N adalah matriks inversnya M . Bila tidak ada N yang memenuhi, maka M dikatakan matriks singular. [1] Invers dari matriks M dinotasikan dengan M^{-1} . Terkhusus untuk matriks diagonal, bila D adalah matriks diagonal berordo n seperti pada contoh di atas dimana tidak ada entri diagonal utama yang bernilai nol, maka

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/d_2 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/d_n \end{bmatrix}$$

Berlaku juga dalam perpangkatan matriks diagonal sehingga secara umum

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2^k & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n^k \end{bmatrix}$$

Dalam kasus perkalian matriks diagonal dengan matriks sembarang yang terdefinisi, misalkan D adalah matriks berordo n , A berukuran $n \times m$, dan B berukuran $m \times n$, maka DA dan BD dapat dicari dengan mudahnya yakni

$$DA = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d_1 a_{11} & d_1 a_{12} & d_1 a_{13} & \dots & d_1 a_{1m} \\ d_2 a_{21} & d_2 a_{22} & d_2 a_{23} & \dots & d_2 a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_n a_{n1} & d_n a_{n2} & d_n a_{n3} & \dots & d_n a_{nm} \end{bmatrix}$$

$$BD = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d_1 b_{11} & d_1 b_{12} & \dots & d_1 b_{1n} \\ d_2 b_{21} & d_2 b_{22} & \dots & d_2 b_{2n} \\ d_3 b_{31} & d_3 b_{32} & \dots & d_3 b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_n b_{m1} & d_n b_{m2} & \dots & d_n b_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks segitiga atas adalah matriks bujur sangkar dimana semua entri di bawah diagonal utama bernilai 0. Matriks segitiga bawah adalah matriks bujur sangkar dimana semua entri di atas diagonal utama bernilai 0. Secara umum, bila matriks P adalah matriks segitiga atas dan matriks Q adalah matriks segitiga bawah, maka

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1n} \\ 0 & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2n} \\ 0 & 0 & p_{33} & \dots & p_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 & \dots & 0 \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & q_{n3} & \dots & q_{nn} \end{bmatrix}$$

Dari matriks segitiga tersebut, terdapat 4 teorema, antara lain:

1. Transpos dari matriks segitiga bawah adalah matriks segitiga atas, begitu juga sebaliknya.
2. Hasil kali dari dua buah matriks segitiga bawah juga merupakan matriks segitiga bawah, begitu juga untuk matriks segitiga atas.
3. Matriks segitiga, baik segitiga atas maupun segitiga bawah, dapat diinversi bila entri di diagonal utamanya tidak ada yang bernilai 0.
4. Invers dari matriks segitiga bawah ialah matriks segitiga bawah juga, begitupun untuk matriks segitiga atas. [1]

B. Transformasi Geometri di Ruang Dua Dimensi

Matriks dapat digunakan untuk melakukan transformasi geometri antara lain:

1. Pencerminan (*reflection*)
2. Perputaran (*rotation*)
3. Pemampatan (*compression*)
4. Pengembangan (*expansion*)
5. Pergeseran (*shear*)

Matriks yang digunakan untuk melakukan transformasi geometri ialah matriks bujur sangkar dimana ordo matriks tersebut menyatakan ruang geometri tersebut. Sehingga, pada umumnya matriks transformasi berordo 2 atau 3.

Pada penerapannya, misal T adalah matriks transformasi pada ruang tiga dimensi dengan entri sebagai berikut.

$$T = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 \end{bmatrix}$$

dan \mathbf{v} adalah sebuah vektor dari titik asal di ruang tiga dimana

$$\mathbf{v} = [x_0 \quad y_0 \quad z_0] \text{ atau } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

sehingga $\mathbf{v}' = \mathbf{v}T$ bernilai

$$\mathbf{v}' = [x_0 \quad y_0 \quad z_0] \begin{bmatrix} t_1 & & \\ & t_2 & \\ & & t_3 \end{bmatrix} = [x_0 t_1 \quad y_0 t_2 \quad z_0 t_3]$$

untuk \mathbf{v} dalam notasi vektor baris. \mathbf{v}' akan menghasilkan nilai yang sama untuk P dalam notasi vektor kolom dengan persamaan $\mathbf{v}' = T\mathbf{v}$.

Transformasi geometri pada umumnya akan menghasilkan hasil transformasi yang sama untuk satu matriks transformasi yang sama meskipun berbeda notasi titik, garis, vektor, dan bidangnya (dalam notasi baris atau notasi kolom). Namun demikian, untuk satu notasi yang sama, $\mathbf{v}T \neq T\mathbf{v}$ karena salah satu perkalian matriks tersebut tidak terdefinisi. Gambar 2.1. memperlihatkan hubungan transformasi geometri dalam ruang dua dimensi, matriks standar, dan ilustrasi transformasi tersebut terhadap bujur sangkar satuan.

Operator	Standard Matrix	Effect on the Unit Square
Reflection about the y-axis	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
Reflection about the x-axis	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	
Reflection about the line y = x	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	
Counterclockwise rotation through an angle θ	$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$	
Compression in the x-direction by a factor of k ($0 < k < 1$)	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
Expansion in the x-direction by a factor of k ($k > 1$)	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
Shear in the x-direction with factor $k > 0$	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
Shear in the x-direction with factor $k < 0$	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	

Gambar 2.1. Tabel ilustrasi transformasi geometri [1]

Untuk transformasi geometri ruang dua di dalam ruang tiga pada sebuah titik, vektor, atau bidang, terdapat cara untuk melakukan transformasi tersebut dengan menambahkan sebuah baris dan sebuah kolom pada matriks transformasinya.

Misalnya P adalah sebuah titik yang berada di ruang tiga

$$P = (x_0, y_0, z_0)$$

dan ingin ditransformasi terhadap sumbu- xz , maka matriks transformasi ruang dua T

$$T = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{bmatrix}$$

akan dimodifikasi menjadi

$$T' = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & t_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_3 & 0 & t_4 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$P' = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & t_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_3 & 0 & t_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 t_1 + z_0 t_2 \\ y_0 \\ x_0 t_3 + z_0 t_4 \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa komponen titik P pada sumbu- y bernilai tetap sedangkan pada sumbu- x dan sumbu- z berubah.

Pada penambahan baris dan kolom matriks transformasi, entri pada diagonal utama harus bernilai 1 dan sisanya yang belum memiliki entri bernilai 0. Bila tidak terdapat transformasi pada sumbu- x , maka matriks T_x menjadi

$$T_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & t_2 \\ 0 & t_3 & t_4 \end{bmatrix}$$

Bila tidak terdapat transformasi pada sumbu- z , maka matriks T_z menjadi

$$T_z = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & 0 \\ t_3 & t_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk transformasi berlipat, misalkan dimulai dari transformasi T_1 kemudian T_2 , sehingga T' yang merupakan matriks transformasi komposisi T_1 dan T_2 ialah

$$T' = T_2 T_1. [3]$$

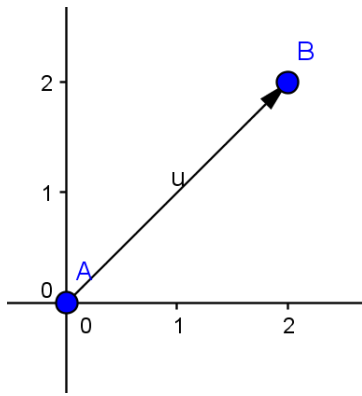
Secara umum, bila transformasi dilakukan dimulai dari T_1 hingga T_n , maka matriks transformasi komposisi T' menjadi

$$T' = T_n T_{n-1} T_{n-2} \cdots T_2 T_1.$$

C. Vektor Ruang dan Operasinya

Vektor adalah suatu kuantitas fisik yang dideskripsikan oleh sebuah bilangan/skalar dan arahnya [1]. Pada makalah ini, vektor dinotasikan dengan huruf kecil yang dicetak tebal $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots, \mathbf{z}$, sedangkan skalarnya dinotasikan dengan huruf kecil dicetak miring a, b, c, \dots, z .

Dalam konsep vektor ruang, skalar dari vektor tersebut menandakan panjang vektor dan anak panah vektor menandakan arah vektor. Gambar 2.2. merupakan contoh vektor \mathbf{u} dengan panjang $2\sqrt{2}$ dan berarah 45° terhadap sumbu- x positif.



Gambar 2.2. Vektor u .
Dibuat dengan Geogebra

Setiap vektor memiliki komponen pada ruang. Gambar 2.2. merupakan vektor pada ruang dua dimensi sehingga komponen sumbu- x dari vektor tersebut ialah 2 dan komponen sumbu- y dari vektor tersebut ialah 2. Vektor u dinotasikan $u=(2,2)$. Sehingga pada umumnya, bila sebuah vektor v merupakan vektor pada ruang tiga dimensi, v_1, v_2 , dan v_3 merupakan komponen vektor v di sumbu- x , sumbu- y , dan sumbu- z , maka

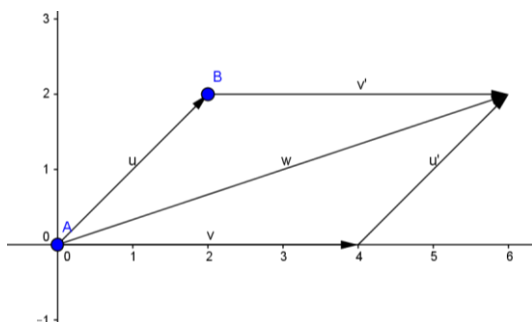
$$v = (v_1, v_2, v_3).$$

Untuk ruang n -dimensi, notasi umum v akan membentuk n -tuple sehingga

$$v = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n).$$

Operasi pada vektor ruang pada makalah ini terdiri atas penjumlahan vektor, pengurangan vektor, perkalian skalar vektor, dan kombinasi linier.

Penjumlahan dua vektor memiliki dua aturan, yakni aturan jajargenjang dan aturan segitiga. Aturan penjumlahan jajargenjang dimulai dengan mempertemukan pangkal dari dua vektor tersebut, memproyeksikan masing-masing vektor secara sejajar sehingga pangkal vektor yang diproyeksikan bertemu dengan ujung vektor lainnya sehingga membentuk jajargenjang, kemudian membentuk vektor dari titik temu pangkal dua vektor hingga titik temu ujung dua vektor. Berikut adalah ilustrasi penjumlahan $u = (2,2)$ dan $v = (4,0)$ dengan aturan jajargenjang.



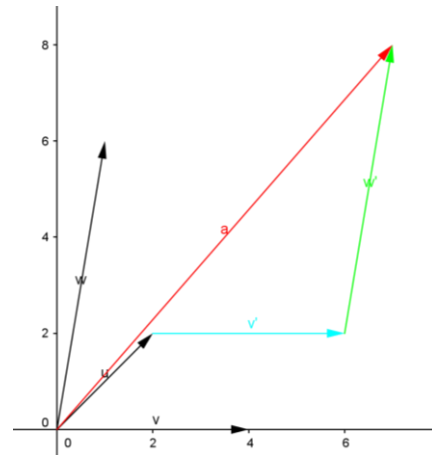
Gambar 2.3. Penjumlahan vektor $u + v$ dengan aturan jajargenjang
Dibuat dengan Geogebra

Dalam penjumlahan vektor pada gambar 2.2, terlihat bahwa $u + v$ dan $v + u$ menghasilkan vektor yang sama, sehingga berlaku

$$v + w = w + v$$

yang merupakan hukum komutatif penjumlahan vektor.

Aturan penjumlahan segitiga cukup mempertemukan ujung vektor dengan pangkal vektor berikutnya, kemudian membentuk vektor dari titik pangkal vektor pertama hingga titik ujung vektor terakhir. Berikut adalah ilustrasi penjumlahan $u = (2,2)$, $v = (4,0)$, dan $w = (1,6)$ dengan aturan segitiga.



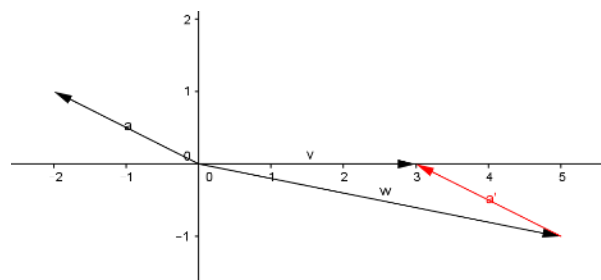
Gambar 2.4. Vektor $u + v + w$ dengan aturan segitiga
Dibuat dengan Geogebra

Keunggulan aturan segitiga dibanding aturan jajargenjang ialah kemudahan dalam membentuk vektor penjumlahannya yang tidak terbatas hanya dua vektor saja dalam satu kali perhitungan.

Dalam pengurangan vektor, vektor diperlakukan sama seperti penjumlahan vektor namun vektor dinonaktifkan terlebih dahulu kemudian dijumlahkan. Misalkan vektor negatif dari vektor v ialah $-v$ yang memiliki panjang yang sama namun berbalik arah sehingga pengurangan v dari w , dinotasikan $v - w$, dicari dengan penjumlahan vektor dengan cara

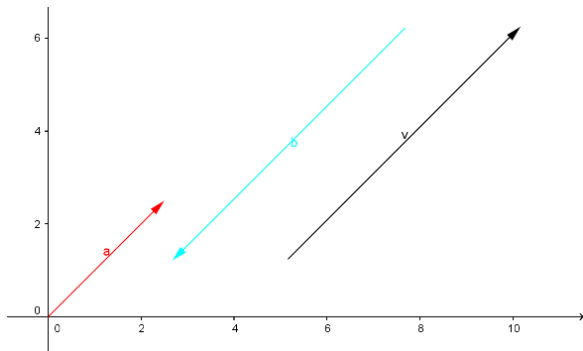
$$v - w = v + (-w)$$

Berikut ini adalah ilustrasi pengurangan $v = (3,0)$ dan $w = (5,-1)$.



Gambar 2.5. Vektor $a = v - w$
Dibuat dengan Geogebra

Perkalian skalar vektor dinyatakan dalam bentuk $k\mathbf{x}$, dimana \mathbf{x} adalah vektor yang bukan nol di ruang dua dimensi atau ruang tiga dimensi, dan k tidak sama dengan nol. $k\mathbf{x}$ akan memiliki panjang $|k|$ kali lipat daripada panjang \mathbf{x} mula-mula, dan memiliki arah yang sama ketika k positif atau berkebalikan arah ketika k negatif. Jika $k = 0$ atau $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, maka $k\mathbf{x} = \mathbf{0}$ [1]. Berikut adalah ilustrasi perkalian skalar \mathbf{v} dimana $\mathbf{a} = 0,5\mathbf{v}$ dan $\mathbf{b} = (-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$.



Gambar 2.6 Vektor \mathbf{v} , $0,5\mathbf{v}$, dan $-\mathbf{v}$ (vektor ditranslasi untuk memudahkan ilustrasi)
Dibuat dengan Geogebra

Konsep berikutnya ialah kombinasi linier. Menurut definisinya, bila \mathbf{w} adalah sebuah vektor dalam R^n , maka \mathbf{w} dikatakan sebagai kombinasi dari linier vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ di R^n bila memenuhi persamaan

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_r\mathbf{v}_r$$

dengan k_1, k_2, \dots, k_r merupakan skalar.[1] Skalar tersebut dinamakan koefisien kombinasi linier. Jika $r = 1$ untuk bentuk di atas, maka $\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1$, sehingga kombinasi liniernya merupakan vektor tunggal yang merupakan vektor dikalikan oleh skalar k_1 .

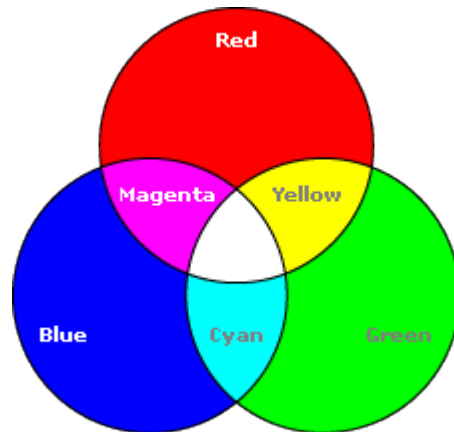
III. PEMODELAN WARNA GRAFIS KOMPUTER

Sama seperti benda pada umumnya, grafis komputer juga dapat terlihat oleh mata manusia hanya saja penampilannya tidak nyata (semu). Grafis komputer juga mengalami perkembangan sesuai dengan berkembangnya teknologi. Mulai dari grafis 2 dimensi hingga grafis 3 dimensi. Mulai dari monokromatis hingga kromatis 32 bit.

Dewasa ini, banyak pengguna komputer sudah memiliki komputer yang menampilkan grafis komputer kromatis 24 bit yang terdiri dari 3 warna dasar, antara lain biru, merah, dan hijau. Model warna dasar tersebut dinamakan model RGB (singkatan dari Red, Green, Blue). Model ini dipakai untuk pewarnaan pada monitor komputer.

Masing-masing dari tiga warna tersebut memiliki intensitas saturasi dari 0 hingga 255 (pada representasi bilangan biner, 255 bernilai $(11111111)_2$) sehingga 24 bit sebenarnya ialah kesatuan dari 3 warna dasar tersebut. Nilai 0 menandakan warna dasar tersebut ialah menjadi hitam (#000000), dan nilai 255 menandakan warna asli dari salah satu warna dasar tersebut, misalnya warna merah murni memiliki kode #FF0000. Bila ketiganya

dicampurkan pada intensitas saturasi maksimalnya, maka terbentuklah warna putih (#FFFFFF). Gambar 2.4. menggambarkan pencampuran warna tersebut.



Gambar 3.1. Model Pewarnaan RGB

Sumber: imgur.com (akses 25 November 2015 22:35)

Namun apabila ketiga warna tersebut dicampurkan pada intensitas tertentu di rentang minimum dan maksimumnya, akan terbentuk $255^3 = 16\,581\,375$ kombinasi warna dari hitam menuju putih. Sehingga dapat disimpulkan, warna diciptakan dari jumlah persentase intensitas warna dasar merah, hijau, dan biru.

Salah satu cara untuk memodelkan warna ialah dengan mengidentifikasi warna dasar sebagai vektor di R^3 yakni

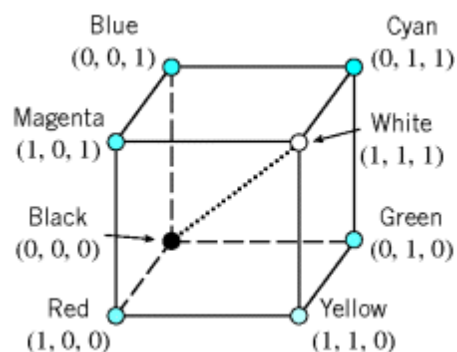
$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (1,0,0), \\ \mathbf{g} &= (0,1,0), \\ \mathbf{b} &= (0,0,1), \end{aligned}$$

dan menciptakan warna baru dengan membentuk kombinasi linier \mathbf{r} , \mathbf{g} , dan \mathbf{b} dengan faktor di rentang $[0,1]$. Faktor kombinasi linier tersebut merepresentasikan persentase intensitas warna dasar tersebut.

Semua kombinasi vektor warna dasar tersebut mengisi ruang R^3 yang dinamakan ruang RGB atau kubus warna RGB [3]. Sehingga, sebuah vektor warna, misalnya \mathbf{w} , di dalam ruang RGB tersebut dapat dituliskan dalam bentuk kombinasi linier yaitu

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= k_1\mathbf{r} + k_2\mathbf{g} + k_3\mathbf{b} \\ &= k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1) \\ &= (k_1, k_2, k_3) \end{aligned}$$

dengan $k_i \in [0,1]$.



Gambar 3.2. Ruang RGB [1]

Setiap sudut dalam ruang RGB tersebut ialah warna dasar RGB ditambah hitam (*black*), putih (*white*), biru muda (*cyan*), merah muda (*magenta*), dan kuning (*yellow*). Dari pemodelan ruang RGB ini juga dikenal pemodelan warna baru yaitu CMYK (diambil dari singkatan *cyan*, *magenta*, *yellow*, dan *black*) yang diambil dari warna hasil pencampuran dua warna dasar RGB. Vektor warna yang berada pada lintasan diagonal ruang RGB dari hitam menuju putih merupakan vektor gradasi abu-abu.

Dalam penerapan animasi perubahan warna, diperlukan waktu konstan t_0 untuk mengubah warna dari c_1 menuju c_2 . Maka dari itu terdapat kecepatan perubahan warna $v(t)$, yakni

$$v(t) = \frac{dc}{t_0} t,$$

dimana

$$dc = c_2 - c_1,$$

sehingga

$$v(t) = \frac{c_2 - c_1}{t_0} t.$$

Misalkan dalam sebuah animasi, grafis kuning diubah menjadi grafis hitam dalam waktu 10 detik, sehingga

$$c_1 = (1,1,0),$$

$$c_2 = (0,0,0),$$

maka

$$dc = c_2 - c_1 = (0 - 1, 0 - 1, 0 - 0) = (-1, -1, 0),$$

sehingga

$$v(t) = \frac{(-1, -1, 0)}{10} t = \left(-\frac{1}{10} t, -\frac{1}{10} t, 0\right).$$

Untuk mencari warna baru saat di t_1 , misalnya c' , maka

$$c' = c_1 + v(t_1).$$

Sehingga pada contoh di atas, setelah 2 detik pertama, warna yang tampak pada grafis tersebut ialah

$$c' = (1,1,0) + \left(-\frac{1}{10}(2), -\frac{1}{10}(2), 0\right) = (0,8; 0,8; 0)$$

yaitu warna campuran dari 80% merah, 80% hijau, dan 0% biru (kode warna #CCCC00).

IV. PEMROSESAN FISIS GRAFIS KOMPUTER

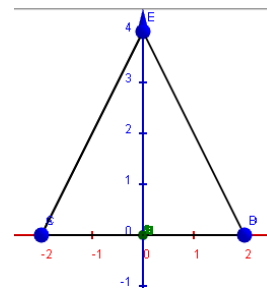
A. Visualisasi Grafis Komputer 3-Dimensi

Seperti yang telah diulas sebelumnya, grafis komputer merupakan tampilan dua dimensi dari sebuah benda tak

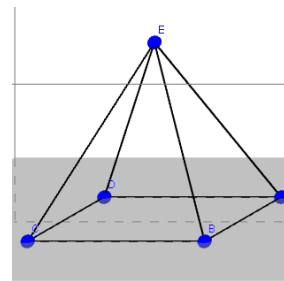
nyata tiga dimensi. Grafis tersebut memiliki titik-titik akhir (*endpoints*) pada ruang tiga dimensi – dinyatakan dalam sistem koordinat-xyz yang masing-masing titik tersebut dihubungkan oleh sebuah garis lurus. Sistem koordinat tersebut memiliki satuan piksel (*pixel* atau *px*).

Ruang tiga dimensi tersebut juga terdapat bagian tampak dan bagian tak tampak. Bagian tampak dari ruang tiga dimensi tersebut berukuran resolusi layar monitor itu sendiri, contohnya 1366 px x 768 px. Bagian tak tampak ialah bagian di luar bagian tampak sehingga diasumsikan ruang tiga dimensi komputer tersebut tak berhingga ukurannya.

Misalkan pada sistem koordinat-xyz tersebut terdapat 5 titik yang terhubung oleh 8 garis (segmen) dengan tampak di bawah ini.



Gambar 4.1. Tampak depan grafis piramida ABCD.E
Dibuat dengan Geogebra



Gambar 4.2 Tampak miring (*oblique*) grafis piramida ABCD.E
Dibuat dengan Geogebra

Titik-titik pada piramida tersebut ialah sebagai berikut:

1. A (-2,2,0)
2. B (2,2,0)
3. C (2,-2,0)
4. D (-2,-2,0)
5. E (0,0,4)

Garis-garis yang menghubunginya ialah garis AB, BC, CD, DA, AE, BE, CE, dan DE sehingga dapat divisualisasikan dalam bentuk matriks ketetanggaan sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Gambar 4.3. Matriks ketetanggaan titik-titik grafis piramida

Pada matriks di atas, titik-titik pada grafis dinyatakan sebagai baris dan kolom secara bersamaan. Untuk grafis piramida di atas, titik A dinyatakan pada baris/kolom ke-1, titik B dinyatakan pada baris/kolom ke-2, dsb. Entri 1 menandakan bahwa titik bernomor i dan titik bernomor j terhubung ($i =$ nomor baris, $j =$ nomor kolom), sedangkan entri 0 menandakan bahwa titik tersebut tidak terhubung. Misalnya, karena sisi CE terhubung, maka $m_{35} = m_{53} = 1$.

Representasi titik-titik grafis juga bisa berupa matriks berukuran $3 \times$ banyak titik pada grafis. Baris pada matriks secara berturut-turut menyatakan komponen titik pada sumbu- x , sumbu- y , dan sumbu- z , dan kolom pada matriks secara berturut-turut menyatakan urutan titik yang bersesuaian (berkorespondensi), sehingga pada contoh grafis piramida di atas, matriks representasi titik tersebut, misalnya P, ialah sebagai berikut.

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

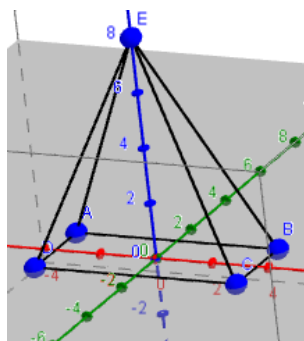
B. Pembesaran/Pengecilan (Penskalaan)

Grafis komputer juga dapat mengalami pembesaran/pengecilan sesuai dengan tampaknya di sumbu x , y , dan z dengan faktor α , β , dan γ secara berturut-turut. Arti informalnya ialah grafis diskala sebesar α pada sumbu- x , diskala sebesar β pada sumbu- y , dan diskala sebesar γ pada sumbu- z , sehingga penskalaan memungkinkan adanya perubahan bentuk grafis. Matriks skalanya, misalnya S, ialah sebuah matriks diagonal yang entrinya adalah faktor-faktor skala tersebut.

$$S = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

Misalnya, jika $\alpha = 1,8$; $\beta = 0,6$; $\gamma = 2,0$, maka untuk grafis piramida P di atas akan menjadi

$$P' = \begin{bmatrix} 1,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 2,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -3,6 & 3,6 & 3,6 & -3,6 & 0 \\ 1,2 & 1,2 & -1,2 & -1,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$



Gambar 4.4. Hasil pembesaran/pengecilan dengan faktor $\alpha = 1,8$; $\beta = 0,6$; $\gamma = 2,0$
Dibuat dengan Geogebra

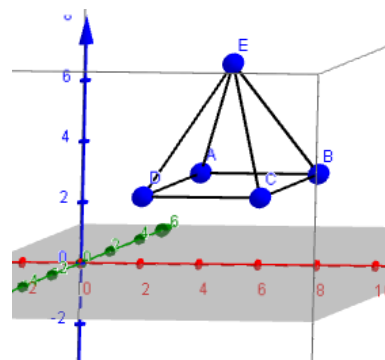
C. Perpindahan (Translasi)

Grafis juga bisa berpindah tempat secara bebas tanpa berubah bentuknya. Grafis komputer dapat berpindah sesuai sumbu x , y , dan z secara bersamaan. Misalnya sebuah titik pada grafis (x_0, y_0, z_0) ditranslasi sehingga menjadi (x_i, y_i, z_i) dengan operasi $(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz)$. Operasi translasi dapat dilakukan untuk satu grafis secara utuh dengan matriks $3 \times n$ dimana n adalah banyak titik pada grafis. Sehingga matriks translasi T akan menjadi

$$T = \begin{bmatrix} dx & dx & dx & \dots & dx \\ dy & dy & dy & \dots & dy \\ dz & dz & dz & \dots & dz \end{bmatrix}$$

Misalkan grafis piramida ditranslasi pada sumbu x sejauh 6 satuan, sumbu y sejauh -2 satuan (2 satuan ke arah yang berlawanan), dan sumbu z sejauh 3 satuan, sehingga $P' = P + T$.

$$P' = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$



Gambar 4.5. Hasil translasi $dx = 6$, $dy = -2$, $dz = 3$
Dibuat dengan Geogebra

D. Perputaran (Rotasi)

Grafis juga dapat berputar juga. Pada makalah ini, batasan perputarannya ialah berputar pada titik asal $(0,0)$. Pada bab sebelumnya telah dijabarkan bahwa matriks rotasi untuk dua dimensi ialah $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, dengan θ adalah sudut rotasi yang berlawanan arah jarum jam. Pada penerapannya di ruang tiga dimensi, salah satu sumbu dianggap konstan, sehingga jika sumbu- z dianggap konstan, maka matriks rotasi R untuk suatu titik P di ruang tiga dimensi ialah

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Arti lain dari sumbu-z dianggap konstan ialah bahwa sumbu-z dianggap sebagai sumbu putarnya. Untuk sumbu-sumbu lainnya, matriks rotasi dibedakan menjadi tiga matriks, yaitu sebagai berikut.

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

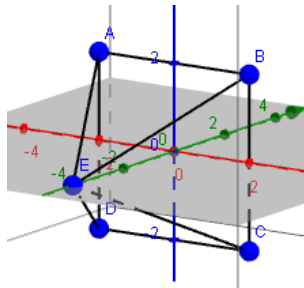
$$R_z = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Contohnya pada piramida ABCD.E di atas, bila diputar 90° pada sumbu x, maka matriks rotasinya ialah

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga piramida yang baru P' akan menjadi

$$P' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$



Gambar 4.6. Hasil perputaran 90 derajat pada sumbu-x. Sumbu-x dinyatakan dengan warna merah. Dibuat dengan Geogebra

V. SIMPULAN

Grafis komputer dapat diproses oleh manusia sebagai pengguna komputer itu sendiri. Grafis komputer dapat dipindah tempatnya, diputar, dan diperbesar/diperkecil dengan menggunakan penerapan aljabar linier terlebih matriks. Pada segi pewarnaannya juga, grafis komputer juga dapat diproses warnanya dengan menggunakan penerapan aljabar linier terlebih operasi vektor ruang.

VI. UCAPAN TERIMA KASIH

Pertama, penulis mengucapkan syukur dan terima kasih kepada Tuhan Yang Maha Esa karena rahmat dan berkat karunia-Nya yang selalu menyertai penulis hingga makalah ini selesai dirancang dan ditulis. Penulis juga

berterimakasih kepada kedua orang tua penulis yang selalu mendukung penulis melalui doa dan bantuan dalam bentuk moral dan material. Akhirnya, penulis juga berterimakasih kepada Bapak Rinaldi Munir selaku dosen pengajar Aljabar Geometri, termasuk dalam mengajarkan pokok bahasan Aljabar Lanjar.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Anton, H., & Rorres, C. (2015). *Elementary Linear Algebra with Supplemental Applications: Eleventh Edition*. Singapore: John Wiley & Sons.
- [2] Ponyton, C. (2003). *Digital Video and HD: Algorithms and Interfaces*. San Fransisco: Morgan Kauffman Publisher.
- [3] Strang, G. (2009). *Introduction to Linear Algebra: Fourth Edition*. Massachussets: Wellesley - Cambridge Press.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 15 Desember 2015

Joshua Atmadja 13514098