Aplikasi Bilangan Kompleks dalam Analisis Sinyal

Muhammad Gumilang / 13514092
Program Studi Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
13514092@std.stei.itb.ac.id

***Abstract*—Pada makalah ini akan dijelaskan tentang aplikasi bilangan kompleks pada anilisis sinyal. Penulis akan menjelaskan teori dasar dari bilangan kompleksdan beberapa teori dasar dari analisis sinyal. Penulis juga akan menyinggung tentang analisis Fourier dalam pemecahan bentuk gelombang. Selain itu, bilangan kompleks juga akan digunakan untuk memperlihatkan representasi kompleks sinusoidal.**

***Keywords*—bilangan kompleks, analisis sinyal, sinyal, kompleks, bilangan imajiner, imajiner, gelombang sinusoidal, gelombang, sinusoidal, Analisis Fourier.**

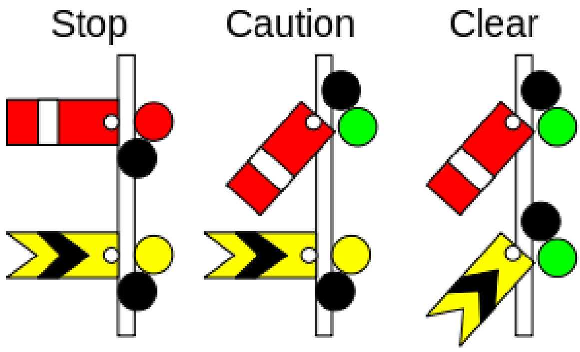
I. Pendahuluan

Seringkali dibutuhkan analisis dan prediksi performansi dari sistem telekomunikasi berdasarkan *power* / daya yang didistribusikan dan analisis frekuensi dari sinyal yang ditransmisikan dalam mendesain sebuah sistem telekomunikasi yang handal. Ini dapat dilakukan dengan analisis sinyal secara matematis. Sinyal informasi yang dikirimkan tersebut dalam sistem telekomunikasi dapat berupa berbagai bentuk sinyal, mulai dari sinus (analog, kontigu), kotak (digital, diskrit), atau segitiga (digital, diskrit).

Apa itu sinyal? Dalam istilah umum, sinyal adalah isyarat atau tanda untuk melanjutkan atau meneruskan suatu pekerjaan, yang biasanya berupa tanda-tanda, lampu-lampu, dll. Dalam kereta api, misalnya, isyara menunjukan suatu kereta berangkat ke stasiun selanjutnya, yang biasanya dikirimkan oleh stasiun yang terkait. Secara teknik, sinyal adalah kuantitas fisik yang berubah-ubah terhadap waktu, ruang, atau variabel-variabel lainnya. Secara fungsi, sinyal sinyatakan dalam bentuk fungsi dari satu atau lebih variabel bebas.

Sinyal sudah sangat membantu kita dalam perkembangan teknologi, terutama teknologi komunikasi, seperti telepon, internet, sinyal *handphone*, dan masih banyak lagi. Kehidupan kita saat ini sudah mulai bergantung pada teknologi-teknolgi tersebut. Bayangkan bila sinyal tidak pernah dikembangkan?

Tentu saja, untuk mengembangkan sinyal, kita perlu ilmu-ilmu dasar yang dibutuhkan. Salah satu ilmu yang penting dalam perkembangan sinyal adalah ilmu tentang bilangan kompleks. Seorang ilmuwan yang bernama Joseph Fourier menyumbangkan ilmu pengetahuannya yang berupa rumus yang digunakan untuk analisis sinyal dengan menggunakan bilangan kompleks, yang dikenal dengan Analisi Fourier. Bagaimanakah perumusan Analisis Fourier tersebut? Bagaimana pula bilangan kompleks membantu rumus-rumus untuk analisis sinyal? Dalam makalah ini akan dibahas penggunaan bilangan kompleks dalam analisis sinyal.



Gambar 1. *Railway Semaphore Signal* adalah contoh sinyal pada perkeretaapian. *Sumber : wikipedia*

II. Teori Dasar

Dasar ilmu yang digunakan dalam makalah ini adalah aljabar geometri. Lebih khususnya, digunakan teori bilangan kompleks. Selain itu, digunakan pula beberapa ilmu dasar dari sinyal.

2.1 Bilangan Kompleks

Dalam matematika, bilangan kompleks dapat ditulis dengan

$$a + bi$$

, dimana a dan b adalah bilangan riil, dan i adalah bilangan imajiner, dimana $i^2 = -1$. Bilangan riil a disebut juga sebagai **bagian riil** dari bilangan kompleks, sedangkan bilangn riil b disebut juga sebagai **bagian imajiner**. Jika pada suatu bilangan kompleks, nilai b adalah 0, maka bilangan kompleks tersebut menjadi sama dengan bilangan riil a. Contohnya adalah $2 + 3i$, dimana 2 adalah bagian riil dan 3 adalah bagian imajiner.

Dapat dilakukan operasi pertambahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian pada bilangan kompleks seperti pada bilangan riil, namun banyak bilangan kompleks juga mempunyai beberapa tambahan sifat-sifat yang menarik. Misalnya, setiap solusi dari persamaan aljabar polinomial adalah bilangan kompleks, tidak seperti bilangan riil yang hanyak memiliki sebagian.

2.1.1 Notasi dan Operasi Bilangan Kompleks

Himpunan bilangan kompleks dinyatakan dengan **C**, atau ℂ. Bilangan riil dapat dinyatakandengan bilangan kompleks dengan menuliskan $a = a + 0i$.

Bilangan kompleks ditambah, dikurang, dan dikali menggunakan sifat-sifat aljabar komutatif, asosiatif, dan distributif, serta persamaan $i^2 = -1$.

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ (pertambahan)

$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$ (pengurangan)

$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ (perkalian)

Bilangan kompleks juga dapat dilakukan pembagian sebagai berikut,

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi).(c - di)}{(c + di).(c - di)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)i$$

2.1.2 Akar Kuadrat Bilangan Kompleks

Akar kuadrat dari bilangan kompleks $a + bi$ (dengan $b \neq 0$) adalah $\pm(\gamma + \delta i)$, dimana

$$\gamma = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$$

dan

$$\delta = sgn(b)\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$$

dimana *sgn* adalah fungsi signum, untuk

$$sgn(b) = \frac{|b|}{b} = \frac{b}{|b|}.$$

2.1.3 Bentuk Polar

Dengan menganggap bahwa

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

dan

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

maka

$$a + bi = r(cos\theta + i.sin\theta) = r\ cis\theta = re^{i\theta}$$

2.1.4 Diagram Argand

Diagram Argand adalah sistem koordinat dua dimensi dimana bilangan kompleks dapat divisualisasikan dalam bentuk titik atau vektor posisi. Koordinat kartesius untuk bilangan kompleks adalah bagian riil x dan bagian imajiner y, sedangkan koordinat sirkularnya adalah $r = |z|$, yang disebut modulus,dan $\varphi = \arg(z)$, yang disebut *argumen kompleks* dari *z.*

$$z = a + bi = re^{i\theta} = r(cos\theta + i.sin\theta)$$

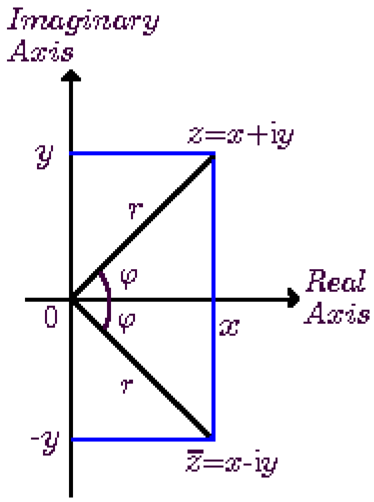
Perlu diperhatikan bahwa argumen kompleks adalah unik modulo 2Π, jadi jika terdapat dua nilai argumen kompleks berbeda sebanyak kelipatan bilangan bulat dari 2Π, kedua argumen kompleks tersebut sama atau ekivalen.

Dengan identitas trigonometri dasar, dapat dituliskan

$$r_1e^{i\theta_1}.r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

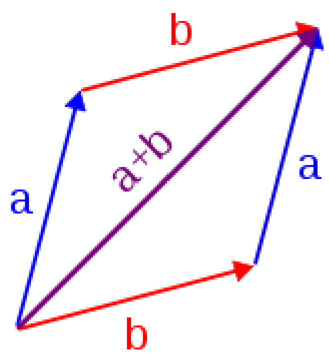
dan

$$\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$



Gambar 2. Representasi bilangan kompleks dalam bentuk polar pada Diagram Argand. Sumbu x menyatkan bagian riil bilangan kompleks dan sumbu y menyatakan bagian imajiner bilangan kompleks.[1]

Penjumlahan dua vektor pada diagram argand sama dengan penjumlahan dua bilangan kompleks, sedangkan rotasi dan pemanjangan vektor sama dengan perkalian pada bilangan kompleks. Perkalian i adalah rotasi 90 derajat berlawanan arah jarum jam ($\frac{\Pi}{2}$ rad) dan mengalikan $i^2 = -1$ sama dengan rotasi 180 derajat (Π rad).



Gambar 3. Penjumlahan dua buah bilangan kompleks secara geometri dengan membentuk paralellogram. [1]

2.2 *Signal Processing*

Signal Processing atau pengolahan sinyal merupakan teknologi yang memetakan teori fundamental, aplikasi, algoritma, dan implementasi pengolahan atau pengiriman informasi yang dimuat dalam berbagai bentuk fisik, simbol, atau bentuk abstrak yang didisain sebagai sinyal. Pengolahan sinyal menggunakan representasi, formalisasi, dan teknik matematika, statistika, komputasi, *heuristic*, dan liangual untuk pemodelan, analisis, pembelajaran, keamanan, forensik, dll.

2.2.1 Sejarah

Prinsip pengolahan sinyal dapat ditemukan di abad ke-17 pada analisis numerik klasik menurut Alan V. Oppenheim dan Ronald W. Schafer. Lebih lanjutnya lagi, mereka menyatakan bahwa “pendigitalan” dari teknik-teknik ini dimulai pada tahun 1940an dan 1950an.

2.2.2 Kategori *Signal Processing*

Pengolahan sinyal dapat dibagi menjadi beberapa kategori, yaitu pengolahan sinyal analog, pengolahan sinyal kontigu, pengolahan sinyal diskrit, pengolahan sinyal digital, pengolahan sinyal non-linear.

2.2.2.1 Pengolahan Sinyal Analog

Pengolahan sinyal analog adalah pengolahan sinyal yang belum didigitalisasi, sebagai mana pada radio, telepon, radar, dan sistem TV jama dahulu. Pengolahan sinyal analog mengandung sirkuit elektronik linear dan sirkuit elektronik non-linear. Contohnya adalah filter pasif, filter aktif, *additive mixers*, integrator, dan *delay lines*.

2.2.2.2 Pengolahan Sinyal Kontigu

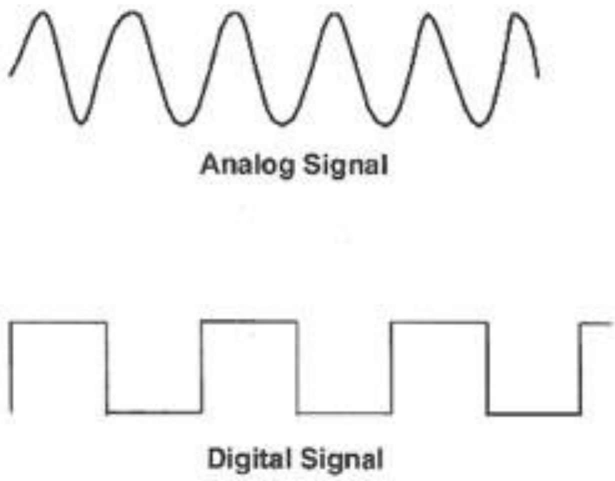
Pengolahan sinyal kontigu adalah sinyal bervariasi dengan perubahan terhadap domain kontigu. Metode pengolahan sinyal kontigu meliputi: domain waktu, domain frekuensi, domain frekuensi kompleks.

2.2.2.3 Pengolahan Sinyal Diskrit

Pengolahan sinyal diskrit adalah untuk sinyal tersampel, terdefinisi pada titik diskrit setiap satuan waktu. Pengolahan sinyal diskrit analog adalah dasar teknologi pada perangkat elektronik seperti *sample and hold circuits*, *analog time-division multiplexers, analog delay lines*, dan *analog feedback shift registers*. Teknologi ini adalah predesesor dari pengolahan sinyal digital dan masih digunakan dalam pemakaian pengolahan sinyal gigahertz.

2.2.2.4 Pengolahan Sinyal Digital

Pengolahan sinyal digital adalah pengolahan sinyal diskrit yang terdigitalisasi. Pengolahan sinyal digital digunakan untuk komputer secara general dan untuk digital sirkuit seperti *ASICs*, *field-programmable gate arrays,* atau *digital signal processors (DSP chips)*. Operasi aritmatikanya meliputi *fixed-point* dan *floating-point*, nilai riil dan nilai kompleks, perkalian dan pertambahan. Operasi aritmatika lainnya yang terdapat pada perangkat keras adalah *circular buffers* dan *look-up tables*. Contoh algoritmah tersebut adalah *Fast Fourier transforms* (*FFT*), filter *finite impulse response* (*FIR*), filter *infinitei impulse response* (*IIR*), dan filter adaptif seperti Wiener dan filter Kalman.



Gambar 4. Perbedaan antara sinyal digital dan sinyal analog. *Sumber : www.privateline.com*

2.2.2.5 Pengolahan Sinyal Non-linear

Pengolahan sinyal non-linear meliputi analisis dan proses dari sinyal yang dibentuk dari sistem non-linear dan berlaku domain waktu, frekuensi, atau spatio-temporal. Sistem non-linear dapat menghasilkan perilaku kompleks yang tinggi meliputi *bifurcations, chaos, harmonics,* dan *subharmonics* yang tidak tidak dapat dianalisis atau dihasilkan dengan sistem linear.

III. Analisis Sinyal dan Analisis Fourier

Bentuk gelombang yang paling penting pada pengolahan sinyal adalah gelombang sinus dan gelombang cosinus. Secara aljabar, gelombang sinus dituliskan

$$x(t) = \sin(2\pi f t)$$

dimana f (dalam Hz) merupakan frekuensi gelombang sinus dan t adalah waktu (dalam sekon). Hal ini sangatlah familiar seperti yang diajarkan di kelas. Sekarang kita lihat fungsi gelombang sinus tersebut dalam bilangan kompleks

$$x(t) = \frac{1}{2} i e^{-i2\pi f t} - \frac{1}{2} i e^{i2\pi f t}$$

Bilangan kompleks digunakan dalam analisis sinyal dan bidang lainnya yang mendeskripsikan sinyal bervariasi secara periodic. Untuk fungsi nyata yang merepresentasikan kuantitas fisik nyata, sering diistilahkan sinus dan cosinus, fungsi kompleks yang bersesuaian dianggap bagian riil nyatanya sebagai nilai original. Untuk gelombang sinus, diberikan frekuensi, nilai mutlak dari z adalah amplitudo dan argumen arg(z) adalah fase.

Sebagian besar sinyal dipisahkan menjadi sejumlah komponen sinyal sinusoida, dimana sinyal dapat dibagi menajadi 2, yaitu sinyal periodik dan sinyal non periodik. Digunakan deret fourier pada analisis sinyal periodik dan transformasi fourier pada analisis sinyal non periodik. Sebelum membahas lebih lanjut, kita harus mengerti terlebih dahulu tentang analisis Fourier

Gambar 5. Jean-Baptiste Joseph Fourier, sebagai penemu analisis fourier yang digunakan pada teknologi zaman sekarang ini. *Sumbere : wikipedia*

3.1 Analisis Fourier

Analisis Fourier pada matematikadigunakan sebagai proses yang memecahkan masalah bentuk gelombang kompleks dengan menguraikan gelombang tersebut menjadi gelombang sniusoidanya. Setiap gelombang yang kompleks dapat diperlihatkan dari sejumlah gelombang sinus murni yang terdiri dari suatu gelombang sinus dasar ditambah harmonik-harmonik khusus gelombang itu. Contohnya adalah menambahkan harmonik gasal pada gelombang sinus (yaitu 3f, 5f, 7f, dst), akan diperloleh gelombang persegi.

Seri Fourier umum yang dapat menggambarkan fungsi periodik apapun adalah

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) \ + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

dimana a_n dan b_n adalah koefisien-koefisien yang akan dievaluasi untuk berbagai harmonik.

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\cos(n\omega t)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\sin(n\omega t)$$

3.1.1 Transformasi Fourier Kontigu

Transformasi fourier merujuk kepada transformasi fungsi argumen riil kontigu, dan transformasi fourier menghasilkan fungsi kontigu frekuensi, yang dikenal dengan distribusi frekuensi. Satu funsi dapat ditransformasikan ke bentuk lain, dan operasi ini bersifat *reversible*. Saat domain input (inisial) fungsi adalah waktu(*t*), dan domain output (final) fungsi adalah frekuensi biasa, transformasi fungsi *s(t)* dengan frekuensi *f* dituliskan dengan bilangan kompleks:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t).\, e^{-i2\pi ft} dt$$

s(t) dapat direpresentasikan sebagai rekombinasi dari eksponensial kompleks dari semua kemungkinan frekuensi:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f).\, e^{i2\pi ft} df$$

Tabel 1. Tabel analisis bentuk dari sinyal berdasarkan harmoniknya.

Bentuk Geombang	DC	Dasar	Ke-2	Ke-3	Ke-4	Ke-5	Ke-6	Ke-7
Persegi	-	$+\frac{4E}{\pi}$	-	$-\frac{4E}{3\pi}$	-	$+\frac{4E}{5\pi}$	-	$-\frac{4E}{7\pi}$
Segitiga	-	$+\frac{8E}{\pi^2}$	-	$+\frac{8E}{3\pi^2}$	-	$+\frac{8E}{5\pi^2}$	-	$+\frac{8E}{7\pi}$
Gigi Gergaji	-	$+\frac{2E}{\pi}$	$-\frac{2E}{2\pi}$	$+\frac{2E}{3\pi}$	$-\frac{2E}{4\pi}$	$+\frac{2E}{5\pi}$	$-\frac{2E}{6\pi}$	$+\frac{2E}{7\pi}$

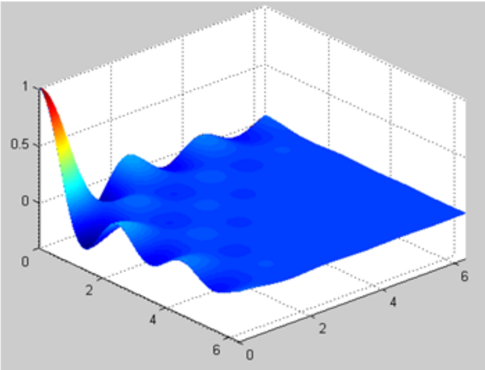
3.1.2 Transformasi Fourier Diskrit

Konvergensi penjumlahan periodik pada domain fekuensi dapat direpresentasi kan dengan seri Fourier, yang koefisiennya merupakan sampel dari fungsi waktu kontigu:

$$S_{\frac{1}{T}}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(f - \frac{k}{T}) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[n].\, e^{-i2\pi fnT}$$

sama halnya dengan transfomasi fourier kontigu, transformasi fourier diskrit memiliki inverse yang dituliskan sebagai berikut

$$s[n] \ \stackrel{\text{def}}{=} T\int_{-\infty}^{\infty} S(f).\, e^{i2\pi fnT} df$$



Gambar 5. Contoh hasil transformasi fourier 2D. *Sumber : aryantiboimau.blogspot.com*

3.2 Analisis Frekuensi Sinyal Periodik Waktu Diskrit

Digunakan deret fourier untuk sinyal periodik waktu diskrit. Misal terdapat sinyal periodik x[n] dengan periode

$x[n] = x[n + N]$, untuk seluruh n.

Penggambaran deret fourier untuk x[n] dengan N fungsi eksponensial yang berhubungan secara harmonik

$e^{i2\pi kn/N}$, k = 1,2,...,N-1

Dan dinyatakan :

$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{i2\pi kn/N}$, k = 1,2,...,N-1

Dengan c_k adalah koefisien dalam tampilan deret.

3.3 Contoh Penerapan Analisis Sinyal

Contoh-contoh dari penarapan analisis sinyal, khususnya penerapan dari analisis fourier, adalah pengolahan sinyal digital dan pengolahan gambar digital, yang mempergunakan versi digital dari analisis fourier (dan analisis Wavelet) untuk menyalurkan, mengkompres, memulihkan, dan memproses sinyal gambar digital, dinyal digital audio, dan sinyal video.

Contoh lain, yang lebih berhubungan dengan AM radio adalah:

$$
\begin{aligned}
\cos\big((\omega+\alpha)t\big) + \cos\big((\omega-\alpha)t\big) &= Re\big(e^{i(\omega+\alpha)t} + e^{i(\omega-\alpha)t}\big) \\
&= Re\big(e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t}\big).\, e^{i\omega t}\big) \\
&= Re(2\cos(\alpha t)\,.\, e^{i\omega t}) \\
&= 2\cos(\alpha t)\,.\, Re(e^{i\omega t}) \\
&= 2\cos(\alpha t)\,.\, \cos(\omega t)
\end{aligned}
$$

IV. KESIMPULAN

Bilangan kompleks sangatlah digunakan dalam dunia sinyal. Lebih khususnya lagi, bilangan kompleks tersebut dipakai dalam analisis fourier, dimana analisis fourier tersebut bervariasi pada seri fourier. Seri fourier tersebut digunakan untuk beracam-macam sinyal. Seri fourier dapat mentransformasi sinyal satu ke bentuk lainnya. Pada jenis sinyalnya, tentu saja rumus nya akan berbeda, terkait pada seri fourier. Seri fourier juga membantu mengetahui bentuk dari sinyal tersebu; apakah kotak, segitiga, atau gigi gergaji. Pada rumus-rumus fourier ini, bilangan kompleks lebih digunakan dalam bentuk Euler dimana untuk merepresentasikan bilangan kompleks tersebu menggunakan bilangan natural *e* pangkat bilangan imajiner *i* dikali θ.

V. UCAPAN TERIMA KASIH

Pada kesempatan ini, penulis mengucapkan puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas segala kenikmatan yang telah diberikan baik berupa nikmat, iman, kesehatan, maupun kekuatan dalam menyusun makalah ini. Penulis juga mengucapkan terimakasih kepada kedua orang tua yang telah memberikan dukungan dan mendidik. Selanjutnya, penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Drs. Judhi Santoso, M.Sc dan Bapak Dr. Ir. Rinaldi Munir, MT. Selaku dosen pengajar mata kuliah Aljabar Geometri atas segala bimbingan serta segala ilmu yang telah diberikan kepada penulis. Penulisnya juga mengucapkan terima kasih kepada pihak yang ikut membantu pembuatan makalah ini, baik secara langsung maupun tidak langsung.

.

REFERENSI

[1] Ahifors, Lars (1979), *Complex analysis* (3rd ed.), McGraw-Hill, ISBN 978-0-07-000657-7

[2] Conway, John B. (1986), *Functions of One Complex Variable I,* Springer, ISBN 0-387-90328-3

[3] Joshi, Kapil D. (1989), *Foundations of Discrete Mathematics,* New York: John Wiley & Sons, ISBN 978-0-470-21152-6

[4] Pedoe, Dan (1988), *Geometry: A comprehensive course*, Dover, ISBN 0-486-65812-0

[5] Press, WH; Teukolsky, SA; Vetterling, WT; Flannery, BP (2007), "Section 5.5 Complex Arithmetic", *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* (3rd ed.), New York: Cambridge University Press, ISBN 978-0-521-88068-8

[6] Burton, David M. (1995), *The History of Mathematics* (3rd ed.), New York: McGraw-Hill, ISBN 978-0-07-009465-9

[7] Katz, Victor J. (2004), *A History of Mathematics, Brief Version*, Addison-Wesley, ISBN 978-0-321-16193-2

[8] Prestini, Elena (2004), *The evolution of applied harmonic analysis: models of the real world*, Birkhäuse, p. 62

[9] Terras, Audrey (1999), *Fourier analysis on finite roups and applications*, Cambridge University Press, p. 20

[10] Briggs, William L.; Henson, Van Emden (1995), *The DFT: an owner's manual for the discrete Fourier transform*, SIAM, p. 4

[11] Heideman, M. T., D. H. Johnson, and C. S. Burrus. "Gauss and the history of the past Fourier transform," IEEE ASSP Magazine, 1, (4), 14-21 (1984)

[12] Knapp, Anthony W. (2006), *Basic algebra*, Springer, p. 501

[13] http://ira.lecturer.pens.ac.id/materi/pengolahan%20sinyal%20digital/PSD-8.pdf, diakses tanggal 15 Desember 2015

[14] http://www.dspguide.com/complex.htm, diakses tanggal 15 Desember 2015

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 14 Desember 2015

Muhammad Gumilang
13514092