Oktonion

Drestanto Muhammad Dyasputro - 13514099
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
dyas@live.com

***Abstract*—Untuk mengenal alam semesta ini lebih jauh, kita harus membuktikan teorema-teorema yang diperkenalkan beberapa orang. Hal yang paling meyakinkan ilmuwan untuk membuktikan sebuah teori, biasanya adalah dengan mengemas teori tersebut menjadi sebuah bahasa yang umum. Bahasa yang paling umum untuk merumuskan sebuah teori adalah matematika. Karenanya, perlulah dilakukan pengembangan terus tentang fondasi umum dari matematika, yaitu *number theory*. Dan salah satu materi yang terus berkembang adalah sebuah sistem bilangan mulai dari riil, lanjut ke kompleks, diperluas ke quaternion, hingga akhirnya pun muncul oktonion.**

***Keywords*—sistem bilangan, quaternion, oktonion**

I. PENDAHULUAN

Sistem bilangan kompleks pun menjadi terkenal selama ini. Mulai dari bilangan kompleks i (√(-1)), lanjut ke 4-tuples milik Hamilton yang disebut quaternion. Namun, sistem ini pun masih belum puas bagi para ilmuwan untuk berhenti di sana. Diperkenalkanlah sistem bilangan kompleks yang lebih diperluas lagi. Diperluas melebihi sistem quaternion. Sistem ini disebut oktonion. Ya, sesuai namanya, okto berarti 8. Artinya, sistem ini adalah sistem bilangan yang secara lengkap memiliki 8 komponen bilangan.

Makalah ini akan membahas tentang sistem bilangan yang diperkenalkan oleh Arthur Cayley dan John T. Graves yang tertarik kepada aljabar quaternion yang diperkenalkan oleh Hamilton. Memperluas 4-tuples yang dikemukakan Hamilton, kedua tokoh ini membentuk 8-tuples yang disebut oktonion.

II. DASAR TEORI

Jika Anda (pembaca) telah mengetahui adanya bilangan real (yang didalamnya memuat rasional dan irrasional), Anda pun perlu tahu bagaimana bilangan real terbentuk. Terdapat berbagai sumber di internet yang menjelaskan ditemukkannya bilangan irrasional yaitu dengan adanya sebuah akar 2, atau sqrt(2), atau $\sqrt{2}$. Namun, kita perlu tahu bahwa akar-akar bilangan positif kurang memasukan para matematikawan. Karenanya, dimulailah dengan inisiatif Gerolamo Cardano (seorang tokoh asal Italia yang berkontribusi banyak di bidan ilmu pengetahuan) mengusulkan adanya bilangan kompleks yang terdiri dari bilangan real dan bilangan imajiner.

Banyak yang bertanya-tanya apa itu bilangan imajiner. Bilangan imajiner adalah akar dari bilangan-bilangan negatif. Direpresentasikan dengan simbol i = √(-1). Hal ini mengherankan dan mengagumkan para ilmuwan dan matematikawan. Dengan timbulnya berbagai macam aplikasi, sistem bilangan kompleks pun menjadi terkenal hingga sekarang dan menjadi fondasi utama dalam berbagai macam bidang dan ilmu pengetahuan.

Ilmu pengetahuan yang paling sering mengacaukan konsep dasar matematika dan mengembangkannya tak lain adalah fisika. Sangat banyak konsep-konsep fisika yang menggunakan bilangan kompleks sebagai salah ssatu metode penyelesaian masalah. Memang, bilangan kompleks bukan dasar fondasi dari materi-materi di fisika, namun, materi-materi seperti arus listrik bolak-balik, gelombang, dan lain-lain menggunakan bilangan kompleks sebagai operator yang tepat guna.

Sesungguhnya, i adalah bilangan kompleks yang dapat direpresentasikan secara geometri dalam bidang planar. Contoh-contoh representasi bilangan i sebagai geometri 2 dimensi (planar) atau $\mathbf{R}^2$ dapat dicari di berbagai buku/internet dari referensi-referensi yang terpercaya.

Namun, sesuai dengan hakikat sebuah ilmu, sistem bilangan kompleks yang ada sekarang pun masih ingin diperluas dan diperluas. Memang, sistem yang ada sekarang, bilangan kompleks, sudah cukup menjelaskan dan menjadi operator yang tepat bagi beragam ilmu pengetahguan, namun, itu bukan alasan para ilmuwan untuk tetap mengembangkan sistem bilangan. Sistem bilangan pun terus berkembang, dan pada makalah ini, mungkin hanya akan kita bahas pada satu sisi saja (karena pengembangan terjadi secara global di mana-mana dan muncul dari beragam prespektif). Hingga pada suatu hari, sebuah ilmuwan pun mengusulkan sistem bilangan yang baru. Kurang lebih, begini pernyataannya.

Bayangkan bahwa aku memiliki sebuah bilangan. Jika bilangan ini dikuadratkan, maka, aku mendapati nilai negatif. Atau untuk mudahnya, negatif satu (-1). Namun, bilangan yang aku miliki bukanlah i ataupun –i. Ya, ini bilangan yang aku miliki adalah sebuah bilangan imajiner, namun bukanlah i ataupun –i. Aku beri nama dia j. Dengan keberadaan j, aku bentuk sebuah sistem bilangan kompleks yang baru yang tidak hanya terdiri dari 2 buah komponen (riil dan imajiner), namun 3 buah komponen (riil, imajiner pertama, dan imajiner kedua), yang disebut triples.

Ilmuwan yang memperkenalkan bilangan imajiner ini adalah Sir William Rowan Hamilton. Namun, seorang anak pun bertanya langsung kepada Hamilton, dapatkah ia mengalikan triples (menjadi triples juga tentunya). Karena perkalian 2 buah sistem bilangan (yang dapat dianggap sebagai ruang vector) harus memenuhi closure (jika dikalikan, tetap memenuhi sistem bilamngan tersebut).

Permasalahan ini cukup terkenal dalam sejarah sistem bilangan baru ini, sehingga direpresentasikan secara matematis. sebagai berikut

$j \in$ Bilangan
dan
$j^2 = -1$,

namun,
$j \neq i$ dan $j \neq -i$

maka, berapa nilai ij = ?

Jika $ij = -1$, apa gunanya membedakan i dengan j, atau bahasa yang lebih sederhana, jika $ij = -1$, apa bedanya i dengan j ? Jika $ij = 1$, bukankah ini artinya $j = 1/i = -i$? Sesungguhnya, motivasi Hamilton memperluas sistem bilangan kompleks adalah untuk merepresentasikan tidak hanya geometri di $\mathbf{R}^2$, namun juga di $\mathbf{R}^3$.

Bapak Hamilton pun menghindari pertanyaan ini dengan menjawab kurang lebih seperti ini, "Saya hanya bisa menjumlahkan dan mengurangkannya". Dan pertanyaan ini pun membuat ia sadar akan kekurangan yang ia perkenalkan dalam sistem bilangannya. Namun, hal ini tidak membuat beliau kehilangan kejeniusannya. Maka, diperkenalkanlah sebuah sistem yang lebih tepat, yaitu bilangan dengan 4 komponen. Merubah triples menjadi 4-tuples adalah ide yang cemerlang, sekarang, terbentuklah sebuah bilangan baru yang terdiri dari 4 komponen :

- Komponen riil (bilangan-bilangan riil yang biasa kita temui)
- 3 Komponen imajiner
  - Komponen i
    (dimana $i^2 = -1$)
  - Komponen j
    (dimana $j^2 = -1$, dan $j \neq \pm i$)
  - Komponen ij
    (perkalian i dengan j, dimana $ji = -ij$)

Untuk mudahnya, penjumlahan dan pengurangan quaternion adalah dengan menjumlahkan secara naif setiap komponen-komponennya (totalnya 4 komponen). Sedangkan perkaliannya, mungkin agak sedikit rumit, perhatikan tabel perkalian berikut :

×	i	j	ij
i	-1	ij	-j
j	-ij	-1	i
ij	j	-i	-1

Mungkin, terlihat agak membingungkan, terutama, mengapa $ij \times ij = -1$? Untuk mudahnya, sifat bilangan-bilangan kompleks ini adalah anti-komutatif.

Inilah yang menyebabkan $ij = -ij$

Selain anti-komutatif, sistem quaternion bersifat asosiatif

Sehingga $i\times(ij) = (i\times i)j = -j$

untuk memahamimnya lebih dalam, perhatikan $(ij)\times(ij)$:

$(ij)\times(ij) = (ij\times i)\times j$ (asosiatif)
$= -(ji\times i))\times j$ (anti-komutatif)
$= -(j\times(i\times i))\times j$ (asosiatif)
$= -(j\times(-1)\times j)$
$= j^2 = -1$ (terbukti sesuai pada tabel)

Sistem bilangan quaternion terlihat sudah cukup sempurna, namun, dalam beberapa literatur, dikatakan bahwa notasi ij membingungkan Hamilton bertahun-tahun. Sehingga, Hamilton pun memperkenalkan k. $k \equiv ij$ diperkenalkan untuk memudahkan dalam merepresentasikan sistem bilangan ini. Sehingga, tabel perkalian pun dapat diperbaiki sehingga terlihat lebih estetik sebagai berikut :

×	i	j	k
i	-1	k	-j
j	-k	-1	i
k	j	-i	-1

Dengan memberi nama ij sebagai k, perilaku anti-komutatif dan asosiatif pun dapat disederhanakan dengan 2 hal.

Pertama, anggap k sebagai suatu bilangan kompleks lain mirip i dan j sehingga mudah diingat bahwa $k^2 = -1$. Yang kedua, ingat konvensi sederhana yaitu $ijk = -1$.

"Bagaimana kita menghitung ij?"

beranjak dari $ijk = -1$
(membagi kedua ruas dengan k)
$ij = -1/k = -(-k) = k$ (terbukti sesuai pada tabel)

"Lantas, bagaimana kita menghitung jk?"

beranjak dari $ijk = -1$
(membagi kedua ruas dengan i)
$jk = -1/i = -(-i) = i$ (terbukti sesuai pada tabel)

"Apakah bisa menghitung ik?"

beranjak dari ijk = -1
(membagi kedua ruas dengan j)
ik = -1/j = -(-j) = j (**tidak** sesuai pada tabel)

Apa yang terjadi. Permasalahan dari sifat anti-komutatif adalah saat dilakukan pembagian, tidak bisa asal. Kita hanya bisa membagi unsur di sebelah kiri maupun kanan, sedangkan jika kita membagi dengan unsur yang ada di tengah (pada kasus ini adalah j), akan muncul nilai negatif.

Maka, yang lebih tepat adalah sebagai berikut :

beranjak dari ijk = -1
(membagi kedua ruas dengan j)
(Perhatikan ruas kiri menjadi negatif)
- ik = -1/j = -(-j) = j
sehingga ik = -j (terbukti sesuai pada tabel)

Cara inipun masih membingungkan. Sehingga mungkin cara mudah lainnya adalah bahwa i, j, dan k berlaku siklik. Sehingga ij = k, jk = i, ki = j, dan tetap pahami bahwa sifat bilangan ini adalah anti-komutatif.

Dengan terbentuknya sistem bilangan semacam ini, maka, dapat dikatakan bahwa sistem bilangan yang baru pun berhasil terbentuk. Sistem menjadi materi pada aljabar geometrid an disebut Quaternion. Quaternion pun menjadi basic foundation dalam geometric algebra dan dapat merepresentasikan posisi di ruang $\mathbf{R}^3$ yang salah satu aplikasinya adalah menentukan posisi satelit.

Dan sama halnya dengan bilangan kompleks, pembagian, invers, serta norma dari sebuah bilangan pun dapat dikenal.

III. SISTEM BILANGAN OKTONION

A. Asal Muasal

Serupa dengan Hamilton, Arthur Cayley dan John T. Graves pun berniat untuk membentuk sistem bilangan yang baru. Sistem bilangan yang lebih luas dibanding quaternion. Upaya untuk melakukan ini adalah dengan membuat 1 komponen tambahan selain i, j, maupun k. Komponen tambahan ini adalah l. Karena keambiguan penulisan l dan 1 (satu), makalah ini pun menggunakan huruf ļ sebagai penggantinya. Bagaimana ļ dirumuskan secara matematis??

Sama dengan i, j dan k, ļ adalah bilangan kompleks, maka :

ļ² = -1

Dan seperti biasa, ļ adalah bilangan yang berbeda dengan i, j, maupun k, maka

ļ ≠ i ; ļ ≠ j ; ļ ≠ k

Dari 2 syarat definisi di atas, mudahlah membentuk suatu sistem bilangan baru yang terdiri dari komponen riil, i, j, k, dan ļ. Sistem bilangan dengan 5 komponen seperti ini pun terbentuk. Namun, operator yang dapat dilakukan adalah operator tambah maupun kurang. Maka, timbul pertanyaan yang serupa dengan kasus Hamilton. Bagaimana kita memaknai perkalian 2 buah sistem bilangan ini? Secara matematis :

ļ ϵ Bilangan
dan
ļ² = -1,

namun,
ļ ≠ ± i ; ļ ≠ ± j ; ļ ≠ ± k

maka, berapa nilai iļ = ? Berapa pula jļ serta kļ ?

Pertanyaan seperti ini tidak mengagetkan Cayley dan Graves. Mereka tahu, bahwa Hamilton perlu mengekspansi ide sistem bilangannya yang tadinya hanya triples menjadi 4-tuples. Maka, Kedua tokoh ini pun dengan sigap mengekspansi sistem bilangan mereka menjadi 8-tuples dengan memasukkan komponen iļ, jļ, serta kļ. Sehingga, didapat sistem bilangan baru yang terdiri dari 8 buah komponen :

- Komponen riil (bilangan-bilangan riil yang biasa kita temui)
- 3 Komponen imajiner siklik
  - Komponen i
    (dimana $i^2 = -1$)
  - Komponen j
    (dimana $j^2 = -1$, dan j ≠ ± i)
  - Komponen k
    (dimana k = ij)
- Sebuah komponen imajiner baru yaitu ļ
- 3 Komponen imajiner yang mengandung ļ
  - Komponen iļ
    (dimana ļi = -iļ)
  - Komponen jļ
    (dimana ļj = -jļ)
  - Komponen kļ
    (dimana ļk = -kļ)

Dari sini, timbul pertanyaan yang serupa. Bagaimana kita melakukan operasi-operasi dasar pada quaternion seperti operasi tambah, kurang, maupun kali?

B. Operasi pada Oktonion

Sama halnya dengan quaternion, mengitung penjumlahan dan pengurangan oktonion adalah menjumlahkan/mengurangkan tiap komponen dari oktonion secara naif (langsung). Namun, bagaimana kita menghitung perkalian? Lebih rumit dibandingkan quaternion, tabel perkalian oktonion adalah sebagai berikut :

×	i	j	k	ļ	iļ	jļ	kļ
i	-1	k	-j	iļ	-ļ	-kļ	jļ
j	-k	-1	i	jļ	kļ	-ļ	-iļ
k	j	-i	-1	kļ	-jļ	iļ	-ļ
ļ	-iļ	-jļ	-kļ	-1	i	j	k
iļ	ļ	-kļ	jļ	-i	-1	-k	j
jļ	kļ	ļ	-iļ	-j	k	-1	-i
kļ	-jļ	iļ	ļ	-k	-j	i	-1

Bagaimana penjelasan tabel di atas. Perhatikan bahwa tabel i, j, k tidak berubah. Artinya, i, j, maupun k masih mengikuti pola dari Hamilton, yaitu 3 komponen imajiner yang siklik. Namun, bagaimana sifat kekomutatifan dan keasosiatifannya?

Tidak sulit dijelaskan bahwa hukum anti-komutatif tetap berlaku. Namun, khusus ļ, berlaku hukum anti-asosiatif.

contohnya, i(jļ) = -(ij)ļ = -kļ (terbukti sesuai tabel)

Namun, perilaku asosiatif oktonion agak sulit dipahami dan dijelaskan. Anti-asosiatif di sini tidak semudah anti-asosiatif biasa, Perhatikan bahwa i, j, dan k adalah siklik, maka, perilaku asosiatif khusus i, j, dan k masih berlaku. Anti-asosiatif baru berlaku jika bertemu dengan ļ seperti contoh di atas. Namun, anti-asosiatif pun tak berlaku jika bertemu dengan 2 ļ.

contohnya (iļ)ļ = i(ļ^2) = -i

Hal ini terasa aneh. Dalam kata yang lebih mudah (atau mungkin tidak terlalu mudah juga) jika asosiatif dilaksanakan untuk mempertemukan 2 buah ļ sehingga terbentuk ļ^2, maka, tetap berlaku hukum asosiatif, dan bukan anti-asosiatif.

Sesungguhnya, membuat aturan-aturan semacam ini dilakukan demi membuat oktonion tidak ambigu. Hal ini sudah dipikirkan matang-matang oleh Cayley dan Graves. Namun, cara dan penjelasan semacam ini menbuat kedua tokoh ini harus memutar otak dalam menjelaskannya dalam bahasa teori yang tidak boleh terlalu banyak pengecualian. Maka, mereka pun memutar otak dan menemukan bentuk oktonion yang lebih mudah dirumuskan (bukan berarti lebih mudah dimengerti).

Sekarang, semua dinamakan sebagai bentuk yang serupa dengan vektor basis yaitu e_0 sampai e_7. e_0 sesungguhnya adalah 1, e_1 adalah i, dan seterusnya hingga e_7 adalah kļ. Dari sini, terbentuklah tabel baru seperti berikut :

×	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	$-e_0$	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	$-e_0$	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	$-e_0$	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	$-e_0$	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	$-e_0$

Sekarang, bagaimana menyatakan sebuah perkalian. Perkalian 2 buah komponen dapat dinyatakan (dengan operator matematik yang lebih *advance*) sebagai berikut :

$$e_i e_j = -\delta_{ij} e_0 + \varepsilon_{ijk} e_k$$

Hal ini mungkin akan lebih membingunkan kita yang belum mengenal operator semacam ini lebih jauh, namun akan lebih memperjelas matematikawan.

IV. KONSEP-KONSEP LAIN YANG DIKEMBANGKAN

A. Prespektif Programmer

Perhatikan bahwa sebagai pada prespektif seorang programmer, sistem bilangan seperti ini harus dapat diolah. Karenanya, penting untuk diketahui, apa yang akan terjadi jika bilangan berbasis oktonion ini dijumlahkan, dikurangkan, dikalikan, atau bahkan dibagi.

Dimulai dari struktur data terlebih dahulu. Jelas, bahwa struktur data bilangan ini bernama oktonion dengan 8 komponen riil (bisa float, double, ataupun tipe data riil yang lain tergantung kebutuhan). 8 komponen ini untuk mudahnya disebut e_0, e_1, e_2, sampai e_7. Beberapa programmer prefer untuk menggunakan selector kedelapan buah oktonion ini sebagai satuan terpisah. Beberapa programmer membuat oktonion ini sebagai array of double berukuran 8. Tentu bentuk data ini bebas, tergantung programmer.

"Bagaimana kita menuliskan oktonion pada user?"

Untuk menuliskan oktonion pada user pun bebas tergantung keinginan dan kebutuhan. Bisa dalam notasi e_0 sampai e_7, boleh juga dengan notasi i, j, k, l, dst.

(untuk struktur data yang bertipe array, jika ingin menuliskan dengan notasi e_0 sampai e_7, maka akan mengalami kemudahan dalam membuat program karena bisa dilakukan dengan cara pengulangan sederhana / traversal)

"Bagaimana menjumlahkan kedua buah oktonion?"

Menjumlahkan oktonion tidak terlalu sulit. Cukup jumlahkan tiap komponen yang sama. Komponen pertama dengan pertama, kedua dengan kedua, ketiga dengan ketiga, begitu seterusnya hingga komponen kedelapan.

(untuk struktur data yang bertipe array, melakukan penjumlahan akan relative mudah karena bisa dilakukan dengan cara pengulangan sederhana / traversal)

"Bagaimana mengurangkan kedua buah oktonion?"

Konsepnya persis sama dengan penjumlahan, hanya saja, operator yang digunakan adalah operator minus (-).

"Bagaimana mengalikan dua buah oktonion?"

Nah, mungkin ini cukup ribet. Karena, sulit untuk membuat program yang mengerti dasar-dasar anti-komutatif, anti-asosiatif, dan lain-lain. Namun, kita tetap dapat memprogramnya. Bagaimana?

Perhatikan bahwa sseluruh oktonion pada program adalah oktonion yang semua komponennya lengkap mulai dari komponen riil sampai komponen terakhir. Hanya saja, nilai dari tiap komponen bisa saja 0. Maka, melakukan pengalian 2 buah oktonion pun adalah aljabar biasa.

Anggap oktonion pertama adalah x dengan nilai setiap komponen adalah x_0 sampai x_7, dan oktonion kedua adalah y dengan nilai setiap komponen adalah y_0 sampai y_7. Maka, hitung secara manual nilai dari $x \times y$ (tidak sulit, yang penting kesabaran), didapatkanlah nilai $x \times y$ berupa oktonion baru. Dan rumus inilah yang dimasukkan ke dalam program. Sehingga, kita tidak perlu memberikan program pengetahuan tentang anti-komutatif dan anti-asosiatif terkait oktonion ini. (jika mendapatkan rumus perkalian oktonion dianggap cukup rumit, dapat dicari hasil perkalian oktonion pada buku/internet dari referensi-referensi yang terpercaya)

B. Ilmu-ilmu Lanjutan dan Aplikasi Terkait Oktonion

Oktonion memang bukanlah sistem bilangan yang memiliki aplikasi taktis langsung yang terlihat di dunia ini. Oktonion sampai saat ini hanya berupa teori yang dikembangkan, dan membuka pandangan bahwa tidak hanya berbentuk tuple (seperti bilangan kompleks) atau bahkan 4-tuples (seperti quaternion) yang mungkin menjadi sebuah sistem bilangan. Adanya sistem bilangan yang logis, yakni Oktonion, membuktikan bahwa sistem bilangan semacam ini dapat diperluas menjadi berapapun. Untuk saat ini, operator terkenal di aljabar tambah, kurang, kali, dan bagi bisa logis jika diimplementasikan ke sistem bilangan dengan komponen 2 pangkat n.

Mulai dari bilangan riil, lanjut ke bilangan kompleks, tidak berhenti di sana dan memunculkan quaternion, memperluas kembali menjadi oktonion pun dapat dengan jelas membuka pikiran ilmuwan untuk membuat sistem bilangan yang lebih banyak seperti sedenion (16 komponen). Aplikasi-aplikasi yang mungkin terkait sistem bilangan ini penting dalam bidang keilmuan matematika, yaitu number theory. Selain itu, string theory yang menjadi pendekatan kita dalam memahami alam semesta ini lebih dalam pun dapat dijelaskan secara matematis dengan sistem bilangan oktonion ini.

V. KESIMPULAN

Oktonion adalah suatu gebrakan baru dalam sistem bilangan sehingga memungkinkan munculnya tak terhingga banyaknya sistem bilangan dengan 2 pangkat n komponen (sedenion dst). Aplikasi nyata dari oktonion belum banyak ditemukan, hanya saja, perluasan sistem bilangan ini penting untuk kemajuan ilmu seperti, number theory.

Kita memang hidup di dimensi ruang $\mathbf{R}^3$ yang jelas tidak dapat membayangkan adanya dimensi di atas dimensi 3. Ruang vector $\mathbf{R}^n$ untuk n>4 hanya dapat direpresentasikan dalam bentuk aljabar, tidak dapat direpresentasikan secara fisik. Namun, oktonion, bahkan sedenion dan sistem bilangan di atas sedenion dibutuhkan untuk mengenal alam semesta lebih luas lagi.

REFERENCES

[1] Baez, John C. (2002). "The Octonions". Bulletin of the American Mathematical Society

[2] http://faculty.georgetown.edu/kainen/octophys.pdf

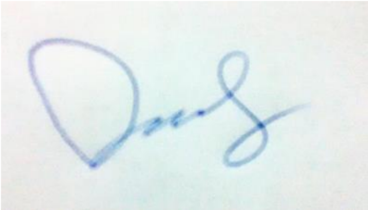
[3] http://www.maplesoft.com/applications/view.aspx?SID=35196&view=html

[4] https://sainstory.wordpress.com/2014/10/29/bilangan-teraneh-dalam-teori-string/

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 10 Desember 2015



Drestanto Muhammad Dyasputro - 13514099