Aplikasi Sistem Persamaan Lanjar dalam Desain Pola Lalu Lintas

Muhammad Kamal Nadjieb - 13514054
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
13514054@std.stei.itb.ac.id

***Abstrak*—Jalan-jalan di kota-kota besar semakin padat dengan bertambahnya jumlah kendaraan yang berada di jalan dalam suatu waktu. Diperlukan pola lalu lintas yang efektif agar tingkat kepadatan kendaraan pada suatu kota menurun. Sistem persamaan lanjar, salah satu pokok bahasan dari Aljabar Geometri, bisa diaplikasikan untuk mendesain pola lalu lintas yang efektif pada suatu daerah.**

***Kata Kunci*—sistem, persamaan lanjar, desain, pola lalu lintas.**

I. Pendahuluan

Kemacetan di jalan merupakan salah satu permasalahan masyarakat urban. Umumnya, kemacetan terjadi karena penumpukan kendaraan di jalan yang disebabkan karena jumlah kendaraan pada suatu jalan melebihi daya tampung kendaraan di jalan tersebut. Oleh karena itu, perlu dibuat suatu sistem yang mengatur lalu lintas di suatu jalan agar tidak terjadi penumpukan pada jalan tersebut.

Pola lalu lintas suatu kota sangat berpengaruh dalam menentukan kepadatan kendaraan di kota tersebut. Pola lalu lintas yang baik akan membuat kepadatan kendaraan suatu kota menjadi lebih rendah. Pola lalu lintas yang buruk akan membuat kepadatan kendaraan pada suatu kota menjadi lebih tinggi. Oleh karena itu, diperlukan suatu cara untuk membuat pola lalu lintas yang efektif sehingga membuat kepadatan kendaraan pada suatu kota menjadi lebih rendah.

Sistem persamaan lanjar merupakan salah satu dari pokok bahasan Aljabar Geometri. Sistem persamaan lanjar digunakan untuk mengetahui nilai variabel-variabel dari beberapa persamaan lanjar yang diketahui. Sistem persamaan lanjar telah diaplikasikan ke banyak hal. Analisis jaringan, analisis rangkaian, interpolasi, dan persamaan kimia seimbang merupakan sebagian dari banyak aplikasi sistem persamaan lanjar.

Pada makalah ini, penulis akan mengenalkan aplikasi sistem persamaan lanjar dalam desain pola lalu lintas sehingga tercipta suatu pola lalu lintas yang efektif.

II. Teori Dasar

A. Sistem Persamaan Lanjar

Sistem persamaan lanjar (SPL) adalah kumpulan dari beberapa persamaan lanjar yang memiliki himpunan variabel yang sama[1]. Bentuk umum dari sistem persamaan lanjar adalah sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}$$

Di sini, x_1, x_2, ... , x_n adalah variabel yang tidak diketahui nilainya, a_{11}, a_{12} , ..., a_{mn} adalah konstanta, dan b_1, b_2, ... , b_m adalah hasil dari masing-masing persamaan lanjar.

Berikut adalah contoh dari sistem persamaan lanjar:

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & - & z & = & 5 \\ 4x & + & 4y & - & 3z & = & 3 \\ -2x & + & 3y & - & z & = & 1 \end{array}$$

Sistem persamaan lanjar di atas menghasilkan $x = 1$, $y = 2$, dan $z = 3$.

B. Matriks

Matriks adalah susunan skalar elemen-elemen dalam bentuk baris dan kolom[2]. Misalkan terdapat matriks A yang berukuran *m* baris dan *n* kolom maka matriks A tersebut bisa direpresentasikan sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Entri a_{ij} disebut elemen matriks pada baris ke-i dan kolom ke-j. Sebuah matriks adalah matriks bujursangkar jikat $m = n$. Untuk kemudahan, kita bisa menuliskan suatu matriks dengan notasi $A = [a_{ij}]$.

Sistem persamaan lanjar pada subbab A bisa direpresentasikan ke bentuk matriks menjadi

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Matriks di atas dinamakan *augmented matrix*.

Maka, contoh dari sistem persamaan lanjar pada subbab A bisa direpresentasikan ke bentuk matriks menjadi

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

C. Matriks Eselon

Sebuah matriks dikatan sebagai matriks eselon jika memiliki sifat-sifat sebagai berikut[1]:

1. Jika sebuah baris tidak dikelilingi bilangan 0, maka bilangan tak nol pertama adalah bilangan 1 (disebut "satu utama").
2. Jika ada baris yang sekelilingnya adalah bilangan 0, maka baris tersebut ditempatkan pada bagian bawah matriks.
3. Pada dua baris bertentang, posisi satu utama pada baris yang lebih bawah adalah lebih kanan daripada satu utama baris yang lebih atas.

Jika divisualisasikan ke dalam bentuk matriks, maka matriksnya akan berbentuk seperti

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix} \text{atau} \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{atau} \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bilangan 1 pada matriks di atas disebut satu utama dan elemen '*' melambangkan sembarang nilai. Berikut adalah contoh dari matriks eselon:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Berikut bukan merupakan matriks eselon:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

D. Matriks Eselon Tereduksi

Sebuah matriks dikatan sebagai matriks eselon jika memiliki sifat-sifat sebagai berikut[1]:

1. Jika sebuah baris tidak dikelilingi bilangan 0, maka bilangan tak nol pertama adalah bilangan 1 (disebut "satu utama").
2. Jika ada baris yang sekelilingnya adalah bilangan 0, maka baris tersebut ditempatkan pada bagian bawah matriks.
3. Pada dua baris bertentang, posisi satu utama pada baris yang lebih bawah adalah lebih kanan daripada satu utama baris yang lebih atas.
4. Sebuah kolom hanya mempunyai sebauh satu utama.

Jika divisualisasikan ke dalam bentuk matriks, maka matriksnya akan berbentuk seperti

$$\begin{bmatrix} 1 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{atau} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Elemen '*' pada matriks di atas melambangkan sembarang nilai. Berikut adalah contoh dari matriks eselon tereduksi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Berikut bukan merupakan matriks eselon tereduksi:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

E. Operasi Baris Elementer

Operasi Baris Elementer (OBE) adalah tatacara mereduksi elemen-elemen di dalam sebuah matriks[1]. Operasi Baris Elementer sendiri terdiri dari tiga operasi, yaitu:

1. Mengalikan sebuah baris dengan konstanta tidak nol.
2. Mempertukarkan dua buah baris.
3. Mengalikan sebuah baris dengan k kali baris yang lain.

Metode Eliminasi Gauss adalah metode untuk merubah *augmented matrix* menjadi matriks eselon dengan mereduksinya menggunakan operasi baris elementer.

Metode Eliminasi Gauss-Jordan adalah metode untuk merubah *augmented matrix* menjadi matriks eselon tereduksi dengan mereduksinya menggunakan operasi baris elementer.

D. Solusi dari Sistem Persamaan Lanjar

Terdapat tiga kemungkinan solusi dari sistem persamaan lanjar, yaitu:

1. Solusi unik atau tunggal,
2. Solusi banyak, atau
3. Tidak ada solusi.

Solusi dari sistem persamaan lanjar dikatakan unik atau tunggal jika untuk masing-masing kolom pada matriks eselen tereduksi terdapat minimal satu “satu utama”. Contoh dari matriks eselon tereduksi yang menghasilkan solusi unik adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 700 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 800 \end{bmatrix}.$$

Solusi dari matriks eselon tereduksi di atas adalah

$$x_1 = 300\ ,\ x_2 = 400,\ x_3 = 700,\ x_4 = 800.$$

Solusi dari sistem persamaan lanjar dikatakan banyak jika ada minimal satu kolom yang tidak memiliki satu utama pada matriks eselon tereduksi dan terdapat satu baris yang seluruhnya berisi bilangan 0. Contoh dari matriks eselon tereduksi yang menghasilkan banyak solusi adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 700 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solusi dari matriks eselon tereduksi di atas adalah

$$x_1 = 300 - t,\ x_2 = 400 - t,\ x_3 = 700 + t,\ x_4 = t.$$

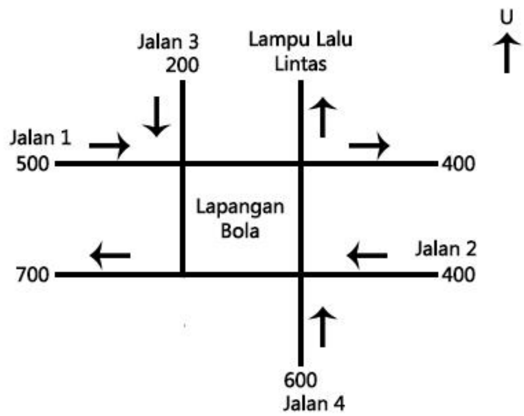
Solusi dari sistem persamaan lanjar dikatakan tidak ada jika ada minimal satu kolom yang tidak memiliki satu utama pada matriks eselon tereduksi dan terdapat satu baris yang seluruhnya berisi bilangan 0 kecuali pada kolom paling kanan. Contoh dari matriks eselon tereduksi yang tidak menghasilkan solusi adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 700 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 800 \end{bmatrix}.$$

III. Aplikasi Sistem Persamaan Lanjar dalam Desain Pola Lalu Lintas

Sistem persamaan lanjar berperan penting dalam desain pola lalu lintas. Dengan sistem persamaan lanjar, kita bisa memperkirakan banyaknya kendaraan per satuan waktu yang dibolehkan dalam suatu jalan agar tidak terjadi kemacetan yang berarti. Pada bab ini, penulis akan memberikan sebuah contoh bagaimana mendesain suatu pola lalu lintas[1].

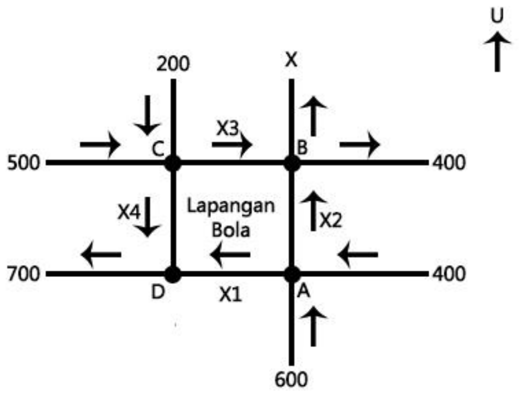
Diketahui diagram volume kendaraan per jam pada suatu wilayah seperti pada Gambar 1 di bawah ini. Diasumsikan bahwa masing-masing jalan adalah satu arah.



Gambar 1. Diagram volume kendaraan per jam pada suatu kompleks[1].

(a) Berapa banyak kendaraan per jam yang harus melewati lampu lalu lintas untuk memastikan bahwa rerata arus kendaraan yang masuk kompleks dan rerata arus kendaraan yang keluar kompleks adalah sama?
(b) Jika lampu lalu lintas telah membuat rerata kendaraan yang masuk kompleks dan rerata kendaraan yang keluar komples adalah sama, berapakah rerata arus kendaraan yang melewati masing-masing jalan yang mengelilingi lapangan bola?

Untuk menjawab pertanyaan di atas, kita buat terlebih dahulu diagram bayangan berkaitan dengan diagram pada soal.



Gambar 2. Diagram bayangan[1].

Untuk menjawab pertanyaan (a), kita tentukan terlebih dahulu jumlah kendaraan yang masuk kompleks dan jumlah kendaraan yang keluar kompleks.

Jumlah masuk = 500 + 400 + 600 + 200 = 1700
Jumlah keluar = x + 700 + 400

Dari soal, diinginkan agar jumlah kendaraan yang masuk sama dengan jumlah kendaraan yang keluar, maka bisa dituliskan

Jumlah masuk = Jumlah keluar
1700 = x + 1100
x = 600.

Dengan begitu, agar rerata kendaraan yang masuk kompleks dan rerata kendaraan yang keluar kompleks sama, lampu lalu lintas harus membuat enam ratus kendaraan melewatinya setiap jam.

Sekarang, kita akan mencoba menjawab pertanyaan (b). Agar tidak terjadi kemacetan di jalan-jalan yang mengelilingi Lapangan Bola, kita tetap harus memastika bahwa jumlah kendaraan yang masuk sama dengan jumlah kendaraan yang keluar untuk masing-masing persimpangan. Untuk memenuhi kondisi di atas, kita bisa membuat sebuah tabel tentang itu.

Persimpangan	Jumlah Masuk	Jumlah Keluar
A	400 + 600	= $x_1 + x_2$
B	$x_2 + x_3$	= 400 + x
C	500 + 200	= $x_3 + x_4$
D	$x_1 + x_4$	= 700

Tabel 1. Jumlah masuk kendaraan dan jumlah keluar kendaraan untuk masing-masing perimpangan.

Dengan x = 600, seperti yang kita dapatkan pada (a), kita bisa membuat sistem persamaan lanjar dari data di atas.

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & & & = & 1000 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 1000 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 700 \\ x_1 & & & & & + & x_4 & = & 700 \end{array}.$$

Dari sistem persamaan lanjar di atas, kita bisa membuat *augmented matrix* sehingga terbentuk matriks dari sistem persamaan lanjar menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1000 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1000 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 700 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 700 \end{bmatrix}.$$

Dari augmented matrix di atas, kita ubah ke bentuk matriks eselon tereduksi menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 700 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 700 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Terlihat dari bentuk geometri dari matriks eselon tereduksi di atas, matriks eselon tereduksi tersebut menghasilkan banyak solusi yang jika dijabarkan akan menjadi

$$x_1 = 700 - t,\ x_2 = 300 + t,\ x_3 = 700 - t,\ x_4 = t.$$

Namun, kita tidak bisa begitu saja menganggap bahwa solusi di atas adalah solusi akhir. Terdapat beberapa syarat yang harus dipenuhi. Dari awal, kita sudah menganSumsikan bahwa semua jalan pada kompleks tersebut adalah satu arah. Oleh karena itu, variabel-variabel di atas tidak boleh merupakan bilangan negatif karena jika variabel-variabel di atas bernilai negatif maka itu mengartikan bahwa arus kendaraan melawan arus yang telah kita tentukan di awal. Dengan melihat solusi x_1, bisa kita simpulkan bahwa t adalah sembarang bilangan real yang memenuhi kondisi

$$0 \le t \le 700 .$$

Dengan begitu, rerata arus kendaraan di jalan-jalan yang mengelilingi Lapangan Bola adalah

$$\begin{gathered} 0 \le x_1 \le 700, \\ 300 \le x_2 \le 1000, \\ 0 \le x_3 \le 700, \\ 0 \le x_4 \le 700. \end{gathered}$$

Dari desain pola lalu lintas yang telah kita buat, tingkat kepadatan kendaraan di suatu jalan bisa ditekan karena kita membatasi rerata kendaraan yang harus lewat per jam. Lampu lalu lintas pun harus diatur intervalnya agar sesuai dengan pola lalu lintas yang telah kita buat. Bisa dibayangkan jika interval lampu lalu lintas diatur dengan pengaturan standar dan tidak berdasarkan desain pola lalu lintas yang baik, akan terjadi penumpukan kendaraan di suatu jalan padahal di jalan lain tidak terjadi penumpukan kendaraan yang berarti.

IV. Kesimpulan

Dengan begitu, terbukti bahwa sistem persamaan lanjar sangat penting dalam proses desain pola lalu lintas suatu daerah agar tidak terjadi penumpukan kendaraan di suatu titik.

V. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Allah SWT atas karunia dan hidayah-Nya dalam proses pembuatan makalah ini. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Bapak Rinaldi Munir dan Bapak Judhi Santoso yang telah membimbing penulis dalam kuliah IF2123 Aljabar Geometri selama ini.

Referensi

[1] Anton. Howard, “Elementary Linear Algebra,” 10th ed. John Wiley & Sons, Inc., 2010.

[2] M. Rinaldi, “Diktat Kuliah IF2120 Matematika Diskrit,” Program Studi Teknik Informatika Institut Teknologi Bandung, 2006, Bandung, Indonesia.

Pernyataan

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 15 Desember 2015

Muhammad Kamal Nadjieb - 13514054