Keunggulan Penyelesaian Persamaan Linear dengan Metode Dekomposisi LU dalam Komputerisasi

Elvina Riama K. Situmorang (13514045)
Program Studi Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
13514045@std.stei.itb.ac.id

***Abstrak*—Untuk menyelesaikan persamaan linear dalam bentuk matriks dapat menggunakan beberapa metode. Salah satu metode untuk mendapatkan solusi dari matriks tersebut adalah dengan menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan, seperti yang sudah diajarkan di kelas Aljabar Geometri (IF2123). Namun, dalam komputerisasi, terdapat sebuah algoritma yang lebih efisien, yaitu metode Dekomposisi LU. Dalam makalah ini, akan dibandingkan kompleksitas waktu dari metode eliminasi Gauss-Jordan dan Dekomposisi LU.**

***Keywords*—matriks, eliminasi Gauss-Jordan, Dekomposisi LU.**

I. PENDAHULUAN

Pada kuliah Aljabar Geometri (IF2123), mahasiswa informatika ITB angkatan 2014 telah mempelajari bagaimana cara mencari solusi dari sistem persamaan linear. Metode yang digunakan adalah eliminasi dan subtitusi balik, dengan menggunakan determinan, metode eliminasi Gauss, serta metode eliminasi Gauss-Jordan. Selain untuk menyelesaikan persamaan linear, eliminasi Gauss-Jordan juga dapat digunakan untuk mencari Invers sebuah matriks.

Ternyata masih ada cara untuk menyelesaikan sistem persamaan linear yaitu melalui metode Dekomposisi LU / *LU Factorization.* Metode lebih sering digunakan dalam komputerisasi penyelesaiian persamaan linear. Melalui makalah ini, penulis akan menjabarkan kompleksitas algoritma dari Dekomposisi LU dan eliminasi Gauss-Jordan dan membandingkan algoritma yang lebih efisien.

II. TEORI MATRIKS DAN OPERASINYA

A. *Matriks*

A1. *Jenis-jenis matriks*

Matriks merupakan kumpulan bilangan, simbol, atau ekspresi yang berbentuk segi empat, disusun menurut baris (m) dan kolom (n). Ada berbagai jenis matriks, yaitu:

1. Matriks Persegi

   Matriks persegi adalah sebuah yang jumlah baris dan jumlah kolomnya sama atau dapat disebut dengan matriks berukuran $n \times n$.
   Contoh :
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$
   A merupakan matriks bujur sangkar berukuran $3x3$ dan B merupakan matriks $2x2$.
2. Matriks Diagonal

   Matriks diagonal adalah kasus khusus dari matriks bujur sangkar. Misalkan a_{ij} menyatakan unsur sebuah matriks di baris ke-i dan kolom ke-j. Unsur a_{ii} disebut sebagai unsur diagonal matriks tersebut. Pada matriks diagonal, unsur selain unsur diagonal bernilai 0. Jika nilai seluruh unsur diagonal bernilai 1, matriks tersebut disebut dengan matriks identitas atau matriks satuan. Matriks identitas memiliki notasi tersendiri, yaitu I.
   Contoh :
   $$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   C merupakan matriks diagonal 3×3 dan I merupakan matriks identitas 3×3.
3. Matriks Segitiga

   Matriks segitiga dibagi menjadi dua macam, yaitu matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah. Matriks segitiga atas adalah matriks bujur sangkar dengan nilai semua elemen yang berada di bawah unsur diagonal adalah 0. Sedangkan matriks segitiga bawah adalah matriks bujur sangkar dengan semua elemen yang berada di atas unsur diagonal bernilai 0.
   Contoh :
   $$D = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$
   D adalah matriks segitiga atas dan E adalah matriks segitiga bawah.
4. Matriks Transpos A (A^t)

   Misalkan A sebuah matriks. Matriks yang mempunyai baris dan kolom yang dipertukarkn dari matriks A disebut transpos dari matriks A yang dinyatakan dengan simbol A^t.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{maka} \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

5. Matriks Simetri

Matriks simetri adalah sebuah matriks bujur sangkar yang memiliki hubungan $A=A^t$.

Contoh :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 7 & 0 \\ 2 & 7 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Matriks B merupakan matriks simetri.

6. Matriks Eselon

Suatu matriks disebut sebagai matriks eselon atau matriks eselon-baris apabila memiliki sifat berikut:

1. Jika sebuah baris tidak seluruhnya terdiri dari unsur 0, unsur pertama yang bukan 0 di baris tersebut haruslah 1. Unsur 1 yang demikian disebut pemuka 1 (*leading* 1)
2. Pada dua baris yang berurutan, pemuka 1 baris yang lebih bawah harus berada di sebelah kanan pemuka 1 baris sebelumnya.
3. Jika terdapat sebuah baris dengan nilai setiap unsurnya adalah 0, maka baris tersebut harus diletakkan di bagian paling bawah.

Apabila matriks tersebut juga memiliki sifat pada setiap kolom yang mengandung pemuka 1, unsur selain pemuka 1 adalah 0, maka matriks tersebut disebut matriks eselon tereduksi.

A2. Operasi Matriks

Ada dua maca operasi yang dapat dilakukan pada sebuah matriks, yaitu

1. Penjumlahan Matriks

Syarat agar dapat melakukan penjumlahan matriks adalah kedua matriks harus memiliki ukuran yang sama.

Contoh:

Penjumlahan dua matriks berukuran 2x2 :

a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

2. Perkalian Matriks

Perkalian matriks ada dua macam, yaitu perkalian matriks dengan skalar dan perkalian matriks dengan matriks lain.

a) Perkalian matriks dengan skalar

Perkalian matriks dengan skalar adalah mengalikan setiap elemen matriks dengan skalar. Suatu matriks yang dikalikan dengan skalar akan menghasilkan matriks yang memiliki ukuran sama seperti awal.

Contoh :

Misalkan k ∈ ℝ dan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ maka

$$k \times A = k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

b) Perkalian suatu matriks dengan matriks lain

Jika terdapat sebuah matriks $A_{m\times n}$ dan matriks $B_{p\times q}$. Maka kedua matriks tersebut dapat dikalikan jika:

- Perkalian $A \times B$ bisa dilakukan jika $n = p$ dan hasilnya akan berukuran $m \times q$.
- Perkalian $B \times A$ bisa dilakukan jika $q = m$ dan matriks hasilnya berukuran $p \times n$.

Contoh :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 2}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$

maka

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2.1+1.1 & 2.1+1.2 \\ 1.1+3.0 & 1.1+3.2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

2. $P = (1 \quad 2)_{1\times 2} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}_{2\times 1}$

maka,

$$P \cdot Q = (1.2 + 2.4)$$
$$= (10)_{1\times 1}$$

Dan

$$Q \cdot P = \begin{pmatrix} 2.1 & 2.2 \\ 4.1 & 4.2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

B. Operasi Baris Elementer (OBE)

Ada beberapa cara untuk menyelesaikan persamaan linear. Misalkan terdapat dua persamaan, yaitu

$$(i)\ x + 2y = 3$$
$$(ii)\ 4x + 5y = 6$$

1. Metode Eliminasi dan Substitusi

$$(i) - 4(ii) \quad -3y = -6$$
$$y = 2$$

Subtitusi balik pada persamaan *(i)* maka didapat

$$1x + 2(2) = 3$$
$$x = -1$$

2. Aturan Cramer

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{1.6 - 3.4}{1.5 - 2.4} = \frac{-6}{-3} = 2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{3.5 - 2.6}{1.5 - 2.4} = \frac{3}{-1} = -1$$

Selain kedua cara tersebut, terdapat cara lain untuk menyelesaikannya, yaitu melalui metode Eliminiasi Gauss dan metode eliminasi Gauss-Jordan. OBE dapat digunakan untuk menyelsaikan persamaan linear mengggunakan kedua metode tersebut. Operasi baris elementer adalah,

1. Menukarkan antar 2 baris yang terdapat pada matriks
2. Mengalikan sebuah baris dengan bilangan bukan 0.
3. Menambah atau mengurangi sebuah baris dengan baris lainnya.

Cara penggunaannya yaitu:

a) Metode Eliminasi Gauss

Eliminiasi Gauss merupakan sebuah metode untuk mengoperasikan nilai-nilai yang ada di dalam matriks sehingga terbentuk matriks yang lebih sederhana yang disebut dengan matriks eselon baris. Misalkan terdapat tiga persamaan linear yaitu,

$$(i)\ 2x + 4y - 2z = 2$$
$$(ii)\ 4x + 9y - 3z = 8$$
$$(iii) - 2x - 3y + 7z = 10$$

Langkah penyelesaian sitem persamaan linear di atas adalah sebagai berikut,

1. Masukkan persamaan menjadi matriks augmentasi
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & | & 2 \\ 4 & 9 & -3 & | & 8 \\ -2 & -3 & 7 & | & 10 \end{pmatrix}$$
2. Baris kedua dikurang dengan 2 kali baris pertama
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ -2 & -3 & 7 & | & 10 \end{pmatrix}$$
3. Baris ketiga dikurangi dengan (-1) kali baris pertama
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 5 & | & 12 \end{pmatrix}$$
4. Baris ketiga dikurangi baris pertama
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 4 & | & 8 \end{pmatrix}$$

Dari baris ketiga didapat 4z = 8, sehingga diperoleh z $= 2$, baris kedua : $y + z = 4$ sehingga diperoleh $y = 2$, dan baris pertama $2x + 4y - 2z = 2$, maka didapat $x = -1$.
Jadi, solusi dari ketiga persamaan linear tadi adalah $(-1, 2, 2)$.

b) Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Metode eliminasi Gauss-Jordan sebenarnya merupakan pengembangan dari metode eliminasi Gauss. Jika menggunakan contoh yang sudah disebutkan sebelumnya pada metode eliminasi Gauss, maka ada tahapan selanjutnya yang harus dilakukan. Tahapan berikutnya yang harus dilakukan adalah membuat matriks tersebut menjadi matriks eselon yang tereduksi.
Langkah selanjutnya :

1. Baris ketiga dibagi dengan 4
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$
2. Baris kedua dikurangi dengan baris ketiga
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$
3. Baris pertama dibagi dengan 2
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$
4. Baris pertama dikurangi dengan 2 kali baris kedua kemudian dikurang dengan (-1) kali baris ketiga
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh solusi dari ketiga persamaan linear tersebut adalah (-1,2,2).

Dalam pencarian invers, jika terdapat matriks A, maka A^{-1} adalah matriks inversnya. Definisi dari invers adalah $AA^{-1} = I$. Melalui A^{-1} dapat ditemukan dengan membuat matriks (A I) serta mengubahnya menjadi (I A^{-1})
Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Maka untuk mencari A^{-1} adalah :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}R_1 + R_2 \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{2}{3}R_2 + \mathrm{R}_3 \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{3}{4}R_3 + R_2 \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{2}{3}R_2 + R_1 \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}R_1 \\ \frac{2}{3}R_2 \\ \frac{3}{4}R_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Jadi, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

III. DEKOMPOSISI LU

Dekomposisi LU merupakan sebuah metode penyelesaian persamaan linear yang diperkenalkan oleh Alan Turing, seorang matematikawan. Dekomposisi LU merupakan sebuah prosedur untuk menyederhanakan sebuah matriks. Dekomposisi LU ini sering digunakan dalam menyelesaikan permasalahan linear pada komputer.

Misalkan terdapat matriks A, maka akan dibentuk matriks segitiga bawah dan matriks segitiga atas sehingga,

$$A = LU$$

dengan L = segitiga bawah dan U = segitiga atas. Karena harus membentuk matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah, maka pada Dekomposisi LU, matriks yang diselesaikan harus berbentuk bujur sangkar. Pada metode Dekomposisi LU menggunakan operasi baris elementer, namun tidak diperbolehkan untuk menukar baris antar matriks karena jika dilakukan penukaran baris antar matriks maka tidak akan kembali seperti matriks awal. Contoh dekomposisi yang terjadi pada matriks 3 x 3, yaitu:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} l_{11}u_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + l_{22}u_{22} & l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33}u_{33} \end{pmatrix}$$

Segitiga atas (U) didapat dari operasi baris elementer tanpa mengubah urutan baris matriks. Dalam Dekomposisi LU, tidak terdapat solusi yang unik dari matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah.

Namun, apabila diagonal matriks segitiga bawah bernilai 1, maka akan terdapat solusi matriks segitiga atas (U) dan matriks segitiga bawah (L) yang unik. Hal ini mempermudah dalam penyelesaian dengan metode Dekomposisi LU.

Misalkan terdapat matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix} = LU$,

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix}$ dan $U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12} + U_{22} & L_{21}U_{13} + U_{23} \\ L_{31}U_{11} & L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} & L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + U_{33} \end{pmatrix}$$

Sehingga nilai pada baris pertama diperoleh :

$$U_{11} = 1, U_{12} = 2, dan\ \ U_{13} = 4$$

Untuk baris kedua diperoleh :

$L_{21}U_{11} = 3 \ \therefore L_{21} \times 1 = 3 \ \therefore L_{21} = 3$

$L_{21}U_{12} + U_{22} = 8 \ \therefore 3 \times 2 + U_{22} = 8 \ \therefore U_{22} = 2$

$L_{21}U_{13} + U_{23} = 14 \ \therefore 3 \times 4 + U_{23} = 14 \ \therefore U_{23} = 2$

Untuk baris ketiga diperoleh :

$L_{31}U_{11} = 2 \ \therefore L_{31} \times 1 = 2 \ \therefore L_{31} = 2$

$L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} = 6 \ \therefore 2 \times 2 + L_{32} \times 2 = 6 \ \therefore L_{32} = 1$

$L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + U_{33} = 13 \ \therefore (2 \times 4) + (1 \times 2) + U_{33} \ \therefore U_{33} = 3$

Sehingga,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Selain itu, dalam menyelesaikan persoalan persamaan linear dengan menggunakan Dekomposisi LU dapat diselesaikan lebih cepat dibandingkan dengan Dekomposisi LU pada umumnya. Metode ini menggunakan matriks yang spesifik pada segitiga bawah, yaitu seluruh elemen diagonalnya bernilai 1. Segitiga atas (U) di dapat dari operasi baris elementer tanpa mengubah urutan baris matriks, dan nilai elemen L lainnya didapat dari lawan perkalian dalam membuat matriks U.

Contoh :

Misalkan terdapat matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -2 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

Langkah untuk mendapatkan matriks segitiga atas :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 16 & -1 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ ($2*R_1+R_2$)
2. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 16 & -1 \\ 0 & -8 & 16 \end{pmatrix}$ ($-3*R_1+R_3$)
3. $U = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 15{,}5 \end{pmatrix}$ ($\frac{1}{2}*R_2+R_3$)

Maka didapat segitiga atas yaitu:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Metode Dekomposisi LU ini memiliki kelemahan, karena tidak semua matriks dapat difaktorkan. Misalkan terdapat matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Untuk mendapatkan baris pertama dari segitiga bawah :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

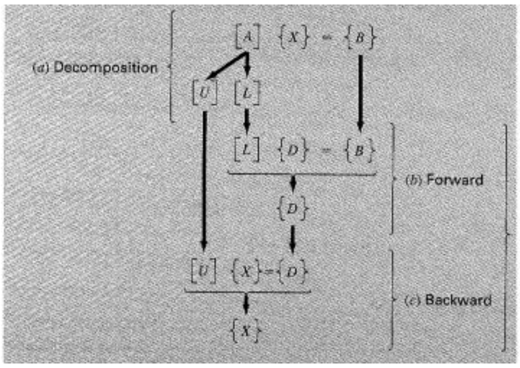
Untuk mendapatkan baris kedua dari segitiga bawah :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{22} & u_{23} \\ 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$u_{22} = 0; u_{23} = 1; u_{33} = -1;\ l_{32}.0 = 1$? Karena tidak ditemukan l_{32} yang memenuhi, maka matriks A tidak dapat difaktorkan.

IV. Keunggulan Algoritma Dekomposisi LU Dibandingkan Eliminasi Gauss-Jordan dalam Komputerisasi

Algoritma Dekomposisi LU lebih sering digunakan dalam sistem penyelesaian persamaan linear. Misalkan diketahui sistem persamaan linear $Ax = b$. Apabila A dapat didekomposisi menjadi LU, maka $ULx = b$ dan Gambar 1 dan 2 merupakan ilustrasi langkah-langkah penyelesaian persamaan linear menggunakan metode Dekomposisi LU serta *pseudocode* dari Dekomposisi LU, sedangkan gambar 3 merupakan *pseudocode* dari metode eliminasi Gauss-Jordan.



Gambar 1. Hasil dekomposisi matriks A[6]

```
SUB Decompose (a,n)
   DO k = 1, n-1
      DO i = k+1, n
         factor = a(i,k)/a(k,k)
         a(i,k)= factor
         DO j = k+1, n
            a(i,j) = a(i,j)-factor*a(k,j)
         END DO
      END DO
   END DO
END Decompose

SUB Subtitute(a, n, b, x)
  *forward substitution
  DO i = 2, n
     sum = b(i)
     DO j = 1, i-1
        sum = sum - a(i,j)*b(j)
     END DO
     b(i) = sum
  END DO
  *back substitution
  x(n) = b(n)/a(n,n)
  DO i = n-1, 1, -1
     sum = 0
     DO j = i+1, n
        sum = sum + a(i,j)*x(j)
     END DO
     x(i) = (b(i)-sum)/a(i,i)
  END DO
END Substitute
```

Gambar 2. Pseudocode Dekomposisi LU[7]

Pada bagian pertama, merupakan langkah untuk dekomposisi matriks A menjadi matriks segitiga atas (L) dan matriks segitiga bawah (U). Kemudian langkah berikutnya adalah subtitusi maju pada $Ld = b$ dan subtitusi mundur pada $Ux = b$

Penentuan solusi persamaan linear menggunakan Dekomposisi LU memiliki kompleksitas algoritma sebagai berikut,

1. Proses dekomposisi

   pada saat $k = 1$, $k = 2$, $j = (n-2)$ kali
   $k = 3$, $j = (n-3)$ kali
   $\vdots$ $\vdots$
   $k = (n-1)$, $j = 1$ kali
   $k = n$, $j = 0$

$$S_{j,k=1} = \frac{(n-2)\big((n-2)+1\big)}{2} = \frac{(n-2)(n-1)}{2} = \frac{n^2-3n+2}{2}$$

pada saat $k = 2$, $k = 3$, $j = (n-3)$ kali
$k = 4$, $j = (n-4)$ kali
$\vdots$ $\vdots$
$k = (n-1)$, $j = 1$ kali
$k = n$, $j = 0$

$$S_{j,k=2} = \frac{(n-3)\big((n-3)+1\big)}{2} = \frac{(n-3)(n-2)}{2} = \frac{n^2-5n+6}{2}$$

$\vdots$

pada saat $k = (n-1)$ $k = 1$, $j = 0$ kali

$S_{j,k=(n-1)} = 1$

Sehingga didapat,

$$T(N) = \frac{(n-1)}{2} \cdot \left(\frac{n^2-3n+2}{2} + 1\right) = \frac{(n-1)(n^2-3n+4)}{2} = \frac{n^3-4n^2+7n-4}{2} = O(n^3)$$

2. Proses subtitusi maju

   pada saat $i = 2$, $j = 1$ kali
   pada saat $i = 3$, $j = 2$ kali
   $\vdots$ $\vdots$
   pada saat $i = n$ $j = (n-1)$ kali
   Sehingga didapat $T(N) = \frac{(n-1)(1+(n-1))}{2}$

$$= \frac{(n-1)(n)}{2} = \frac{n^2-n}{2} = O(n^2)$$

3. Proses subtitusi balik

   Langkah awal pada saat i traversal menurun dilakukan pengulangan sebanyak,
   pada saat $i = (n-1)$, $j = 1$ kali
   pada saat $i = (n-2)$, $j = 2$ kali
   $\vdots$ $\vdots$
   pada saat $i = -1$ $j = (n+2)$ kali
   Sehingga didapat,

$$T(N) = \frac{(n+1)(1+(n+2))}{2} = \frac{(n+1)(n+3)}{2} = \frac{n^2+4n+3}{2} = O(n^2)$$

Sehingga didapat kompleksitas dari algoritma Dekomposisi LU adalah sebagai berikut,

$$O(n^3) + O(n^2) + O(n^2) = O(n^3)$$

```
function GAUSS(A ∈ ℝ^{n×n+1})
    for (i = 1; i ≤ n; i++) do
        // Search for maximum in this column
        maxEl = |A_{i,i}|
        maxRow = i
        for (k = i + 1; k ≤ n; k++) do
            if |A_{k,i}| > maxEl then
                maxEl = A_{k,i}
                maxRow = k
            end if
        end for

        // Swap maximum row with current row
        for (k = i; k ≤ n; k++) do
            tmp = A_{maxRow,k}
            A_{maxRow,k} = A_{i,k}
            A_{i,k} = tmp
        end for

        // Make all rows below this one 0 in current column
        for (k = i + 1; k ≤ n; k++) do
            c = −A_{k,i} / A_{i,i}
            for (j = i; j ≤ n; j++) do
                if i == j then
                    A_{k,j} = 0
                else
                    A_{k,j} += c · A_{i,j}
                end if
            end for
        end for
    end for

    // Solve equation for an upper triangular matrix
    x = {0} ∈ ℝ^K
    for (i = n; i ≥ 1; i--) do
        x_i = A_{i,n+1} / A_{i,i}
        for (k = i − 1; k ≥ 1; k--) do
            A_{k,n+1} −= A_{k,i} · x_i
        end for
    end for

    return x
end function
```

Gambar 3. Pseudocode Metode Gauss-Jordan[7]

Tahap pertama yang perlu dilakukan dalam penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan adalah melakukan *pivoting strategy* (tatancang pemorosan). Hal ini diperlukan untuk mengurangi kesalahan dalam perhitungan. *Pivoting strategy* merupakan langkah kerja untuk mengurutkan nilai dari kolom pertama setiap baris sebuah matriks, yaitu mengurutkan dari yang nilainya paling besar hingga yang paling kecil.

Tahapan yang dilakukan dari *Pseudocode* di atas yaitu,

1. Mencari suatu kolom yang memiliki nilai paling besar.
2. Mengurutkan setiap barisnya
3. Operasi baris elementer dan membentuk segitiga atas.
4. Menentukan solusi dari persamaan linear tersebut dari matriks segitiga atas yang terbentuk.

Penentuan solusi persamaan linear menggunakan metode Gauss-Jordan ini memiliki kompleksitas algoritma sebagai berikut,

1. Pada saat *pivoting strategy* dalam mencari baris yang memiliki nilai kolom pertama paling besar, dilakukan pencarian sebanyak,
   pada saat $i = 1,$ $k = (n-1)$ kali
   pada saat $i = 2,$ $k = (n-2)$ kali
   $\vdots$ $\vdots$
   pada saat $i = (n-1)$ $k = 1$ kali
   Sehingga didapat $T(N) = \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2}$
   $$= \frac{(n-1)(n)}{2}$$
   $$= \frac{n^2-n}{2} = O(n^2)$$
2. Pada saat mengurutkan setiap baris yang ada pada matriks dilakukan operasi sebanyak,
   pada saat $i = 1,$ $k = n$ kali
   pada saat $i = 2,$ $k = (n-1)$ kali
   $\vdots$ $\vdots$
   pada saat $i = n$ $k = 1$ kali
   Sehingga didapat
   $$T(N) = \frac{n(n+1)}{2}$$
   $$= \frac{n^2+n}{2} = O(n^2)$$
3. Proses yang terjadi pada saat dilakukan OBE adalah,
   pada saat $i = 1,$ $k = 2,$ $j = n$ kali
   $k = 3,$ $j = n$ kali
   $\vdots$ $\vdots$
   $k = n$ $j = n$ kali
   $\therefore k\ terjadi\ sebanyak\ (n-1)\ kali$
   $$S_j = \frac{(n-1)(n+n)}{2} = \frac{2n^2-2n}{n} = n^2 - n$$
   pada saat $i = 2,$ $k = 3,$ $j = n$ kali
   $k = 4,$ $j = n$ kali
   $\vdots$ $\vdots$
   $k = n$ $j = n$ kali
   $\therefore k\ terjadi\ sebanyak\ (n-2)\ kali$
   $$S_j = \frac{(n-2(n+n)}{2} = \frac{2n^2-4n}{n} = n^2 - 2n$$
   $\vdots$
   pada saat $i = (n-1)$ $k = 1$ kali $j = n$ kali
   $\therefore k\ terjadi\ sebanyak\ 1\ kali$
   $S_j = 1$
   Sehingga didapat
   $$T(N) = \frac{(n-1)(n^2-n+1)}{2}$$
   $$= \frac{n^3-2n^2-1}{2} = O(n^3)$$
4. Pada saat menentukan solusi dari matriks dilakukan operasi sebanyak,
   pada saat $i = n,$ $k = (n-1)$ kali
   pada saat $i = (n-1),$ $k = (n-2)$ kali
   $\vdots$ $\vdots$
   pada saat $i = 2$ $k = 1$ kali

Sehingga didapat,

$$T(N) = \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2}$$
$$= \frac{(n-1)n}{2}$$
$$= \frac{n^2-n}{2} O(n^2)$$

Sehingga didapat kompleksitas algoritma metode Gauss-Jordan adalah sebagai berikut

$$O(n^2) + O(n^2) + O(n^3) + O(n^2) = O(n^3)$$

Algoritma dari Dekomposisi LU dan metode Gauss-Jordan memiliki kompleksitas yang sama, yaitu $O(n^3)$. Tetapi, dari kedua algoritma ini dapat ditentukan bahwa algoritma Dekomposisi LU sedikit lebih efisien dibandingkan metode Gauss-Jordan. Hal ini dapat dilihat dari $T(n)$ yang mendominasi dalam proses. Selain dari $T(n)$ yang mendominasi, penyelesaian persamaan linear menggunakan metode Gauss-Jordan memerlukan langkah-langkah penyelesaian yang lebih panjang, yaitu 4 langkah sedangkan dengan Dekomposisi LU hanya dilakukan 3 langkah.Tabel 1 akan memperlihatkan $T(n)$ dan $O(n)$ dari kedua algoritma agar lebih mudah dibandingkan serta pembanding setiap langkahnya.

Algoritma	$O(n)$	$T(n)$
Dekomposisi LU	$O(n^3)$	$\frac{n^3-4n^2+7n-4}{2}$
Metode Gauss-Jordan	$O(n^3)$	$\frac{n^3-2n^2-1}{2}$

(a)

Langkah	$T(n)$ Metode Gauss-Jordan	$T(n)$ Dekomposisi LU
1.	$\frac{n^2-n}{2}$	$\frac{n^3-4n^2+7n-4}{2}$
2.	$\frac{n^2+n}{2}$	$\frac{n^2-n}{2}$
3.	$\frac{2n^2-4n}{n}$	$\frac{n^2+4n+3}{2}$
4.	$\frac{n^3-2n^2-1}{2}$	

(b)

Tabel 1. (a) perbandingan $O(n)$ dan $T(n)$ (b) perbandingan setiap langkah yang dilakukan dari Dekomposisi LU dan metode Gauss-Jordan

V. KESIMPULAN

Menurut pembahasan yang telah dituliskan sebelumnya, dapat disimpukan bahwa terdapat banyak cara untuk menyelesaikan persamaan linear. Namun, dalam komputerisasi, apabila matriks tersebut berbentuk persegi, lebih efisien jika menggunakan metode Dekomposisi LU dibandingkan dengan metode eliminasi Gauss-Jordan.

.

V. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Tuhan Yang Maha Esa atas segala berkat yang telah diberikannya kepada penulis sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Selanjunya, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah membantu serta memberikan masukan dalam penyelesaian makalah ini :

1. Bapak Dr.Ir. Pak Rinaldi Munir, M.T. dan Bapak Drs. Judhi Santoso, M.Sc. selaku pengajar mata kuliah IF2123 Algoritma Geometri atas segala bimbingan serta ilmu yang telah diberikan kepada penulis.
2. Teman-teman yang telah memberikan ide dan inspirasi tentang bagaimana peluang adanya kesamaan sidik jari individu.
3. Pihak-pihak lain yang telah membantu.

REFERENSI

[1] Strang, Gilbert, *Linear Algebra and Its Applications 4th Ed.*.

[2] Strang, Gilbert, *Introduction to Linear Algebra 4th Ed.* Wellesley-Cambridge Press, 2009.

[3] https://www.youtube.com/watch?v=UlWcofkUDDU, diakses pada 8 Desember 2015.

[4] https://www.seas.ucla.edu/~vandenbe/103/lectures/lu.pdf, diakses pada 8 Desember 2015.

[5] http://nucinkis-lab.cc.ic.ac.uk/HELM/workbooks/workbook_30/30_3_lu_decomposition.pdf, diakses pada 8 Desember 2015.

[6] http://www.cl.cam.ac.uk/teaching/1314/NumMethods/supporting/mcmaster-kiruba-ludecamp.pdf, diakses pada 8 Desember 2015.

[7] http://www.ce.sc.edu/DeptInfo/members/faculty/rizos/Courses/ECUV520/Software%20and%20Resources/LU%20Decomposition%20-%20Pseudo.pdf, diakses pada 12 Desember 2015.

[8] http://martin-thoma.com/solving-linear-equations-with-gaussian-elimination/, diakses pada 12 Desember 2015.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 15 Desember 2015

Elvina R. K. Situmorang (13514045)