Aplikasi Matriks pada Model Input-Output Leontief

Febi Agil Ifdillah (13514010)
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
febi_agil@students.itb.ac.id

***Abstract* - Analisis *input-output* sangat berguna untuk memodelkan suatu perekonomian. Salah satu model yang populer dan menjadi dasar bagi model-model lainnya adalah model yang dikembangkan oleh Leontief, yang menunjukkan hubungan antara beragam industri dalam suatu sistem ekonomi. Model ini terbagi menjadi dua jenis, yaitu model tertutup dan terbuka. Keduanya merepresentasikan tipe perekonomian yang berbeda, namun sama-sama menggunakan matriks untuk memodelkannya. Melalui model Leontief kita bisa melihat apakah suatu perekonomian produktif atau tidak. Kita bahkan bisa menentukan level produksi agar semua kebutuhan di dalam dan di luar sistem dapat terpenuhi.**

***Keywords*—Model input-output Leontief, Ekonomi, Aplikasi Aljabar Lanjar, Matriks dan sistem persamaan lanjar,.**

I. PENDAHULUAN

Para ekonom berfokus pada inovasi dan mencapai efisiensi dengan mereduksi biaya produksi agar dapat memaksimalkan keuntungan serta meningkatkan konsumsi. Mereka menggambarkan perekonomian sebagai alur sirkuler antara produsen dan konsumen.

Untuk dapat mengerti bagaimana cara memanipulasi perekonomian pada suatu negara atau daerah, kita harus mampu memodelkan beragam sektor yang ada pada perekonomian tersebut. Salah satu model yang populer adalah model input-output Leontief.

Wassily Leontief merancang sebuah model *input-output* untuk ekonomi. Model yang dirancang Leontief merupakan basis bagi banyak model yang sekarang digunakan di berbagai belahan dunia, dan dapat diterapkan diberbagai ukuran ekonomi mulai dari binis kecil hingga mencakup seluruh dunia. Pada 18 Oktober 1973, Professor Leontief dianugerahi penghargaan Nobel pada bidang ekonomi atas karyanya tersebut.

Sasaran utama dari model *input-output* Leontief yang dikembangkan pada tahun 1930an itu adalah untuk mempelajari interdependensi antara beragam sektor dalam ekonomi. [2].

Model input-output, ketika diaplikasikan secara tepat, dapat menjadi alat yang sangat berguna untuk memperkirakan bagaimana efek dari suatu perubahan pada aktivitas ekonomi. Misalnya efek perubahan jumlah permintaan pada Produk Domestik Bruto (PDB) suatu negara.

II. Dasar Teori

1. Sistem Persamaan Lanjar

a. Persamaan Lanjar

Persamaan lanjar dengan *n* peubah $x_1, x_2, \ldots, x_n$ secara umum berbentuk sebagai berikut :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

dengan $a_1, a_2, \ldots a_n$ dan $_b$ berupa konstanta dengan a_i tidak semuanya nol [3]. Jika b = 0, maka persamaan lanjar tersebut disebut persamaan lanjar homogen. Berikut ini adalah contoh persamaan lanjar dengan dua peubah :

$$2x + 3y = 5$$

Sedangkan contoh berikut ini bukanlah persamaan lanjar :

$$3x + 10x^3 = 3$$
$$\sin x + y = 0$$

Himpunan berhingga dari persamaan linear dinamakan sistem persamaan lanjar. Misalnya, dua buah persamaan lanjar dengan dua peubah seperti berikut ini.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 4x + 6y &= 10 \end{aligned}$$

Secara umum, sistem persamaan dengan m buah persamaan lanjar dan n buah peubah yang tidak diketahui x1, x2, … xn dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & \ldots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & \ldots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & \ldots & a_{mn}x_n & = & b_m \end{bmatrix}$$

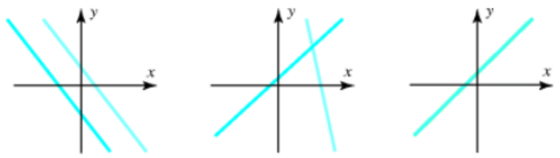
b. Solusi Sistem Persamaan Lanjar

Mari kita lihat sistem persamaan dengan bentuk

$$a1x + b1y = c1$$

a2x + b2y = c2

Kita dapat menggambar grafik dari dua persamaan di atas sebagai berikut :



Gambar 1 - nol solusi (kiri), satu solusi(tengah), tak hingga solusi(kanan).

Sumber :Anton, Howard & Rosses, Chris. "Elementary Linear Algebra". John Wiley & Sons. 2010.

Setiap solusi (x,y) berkorespondensi dengan titik di mana garis berpotongan. Setiap sistem persamaan lanjar memiliki nol, satu atau tak hingga banyaknnya kemungkinan solusi [3].

1. Kedua garis sejajar dan berbeda, sehingga tidak ada perpotongan dan menandakan bahwa sistem persamaan tidak memiliki solusi.
2. Kedua garis berpotongan pada satu titik, yang berarti sistem persamaan lanjar memiliki satu buah solusi.
3. Kedua garis berkoinsiden, yang berarti tak hingga banyaknya titik berpotongan, solusi sistem persamaan lanjarnya pun tak hingga.

c. Menyelesaikan Sistem Persamaan Lanjar

Untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Lanjar, kita dapat melakukan berbagai cara seperti eliminasi. Misalkan, untuk sistem persamaan dengan n persamaan dan n peubah, n = 2.

2x + 3y = 5 (i)
4x + 9y = 13 (ii)

1. Eliminasi

Kurangi persamaan (ii) dengan dua kali persamaan (I). Sehingga menyisakan 3y :

Persamaan 1 – 2(Persamaan 2), menghasilkan

3y = 3
y = 1

substitusikan y,

2x + 3(1) = 5
2x = 2
x = 1

Maka, x =1, y =1.

Secara umum, solusi untuk *n* buah persamaan akan berbentuk *n* buah tuple berurutan (S1, S2, …, Sn). Penyelesaian menggunakan eliminasi ini cukup mudah, namun akan sangat menyulitkan apabila kita bekerja dengan n buah persamaan yang sangat banyak.

2. Matriks Augmentasi dan Operasi Baris Elementer (OBE)

Seiring dengan meningkatnya jumlah persamaan pada sistem persamaan lanjar, penggunaan metode eliminasi menjadi tidak efektif dan rumit. Untuk itu kita akan menggunakan metode baru menggunakan matriks augmentasi dan operasi baris elementer. Perhatikan sistem linear dengan m buah persamaan dan n buah peubah berikut

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & \dots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & \dots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & \dots & a_{mn}x_n & = & b_m \end{matrix}$$

Kita dapat memandang sistem di atas sebagai sebuah matriks.

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & \dots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & \dots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & \dots & a_{mn}x_n & = & b_m \end{bmatrix}$$

Matriks seperti gambar x disebut matriks augmentasi. Misalkan kita akan membentuk matriks augmentasi dari sistem berikut ini

$$\begin{aligned} x1 + x2 + 3x3 &= 10 \\ 4x1 - 4x2 + 5x3 &= 5 \\ 2x1 + x1 - 3x3 &= 3 \end{aligned}$$

Maka, matriks augmentasinya adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ 4 & -4 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Setelah membentuk matriks augmentasi, kita dapat menyelesaikan sistem persamaan tersebut dengan melakukan beberapa operasi aljabar terhadap matriks augmentasi yang tidak akan mengubah hasilnya dengan cara:

1. Kalikan sebuah baris dengan konstanta tidak nol
2. Tukar posisi dua buah baris matriks
3. Tambahkan *n* buah kali sebuah baris ke baris lainnya

Operasi-operasi tersebut dinamakan Operasi Baris Elementer(OBE). Pada matriks terdapat operasi yang bernama invers. Untuk melakukan invers matriks 2x2,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

kita dapat menggunakan persamaan berikut :

$$D^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

dengan det A adalah determinan dari matriks A, yaitu det A = (axd)-(bxc).

2. Analisis input-output

Analisis input-output adalah sebutan untuk kerangka analisis yang dikembangkan oleh Professor Wassily Leontief di tahun 1930an. Istilah lain dari analisis input-output ini adalah analisis antar-industri (interindustry analysis).

Tujuan awal dikembangkannya model ini adalah untuk mengetahui interdependensi antar industri. Sekarang, konsep dasar yang diciptakan oleh Leontief merupakan komponen kunci dari berbagai macam jenis analisis ekonomi [2].

Model dasar dari input-output Leontief secara umum dibentuk berdasarkan data ekonomi yang telah diobservasi pada daerah geografis yang spesifik, misalnya negara, provinsi, dan sebagainya. Pada bentuk paling dasarnya, pemodelan yang digunakan oleh Leontief adalah dengan menggunakan sistem persamaan lanjar dengan n buah persamaan dan n buah peubah. Kita dapat merepresentasikan sistem tersebut menggunakan matriks untuk memudahkan pembacaan. Pada bahasan kali ini, asumsikan bahwa area ekonomi yang akan dimodelkan adalah sebuah provinsi. Pada area tersebut, beragam jenis kegiatan ekonomi harus dapat dipisahkan menjadi beberapa segmen atau sektor produksi[2]. Misalnya industri tambang(besi), pabrik meja, paku, dan sebagainya. Data yang dibutuhkan untuk memulai pemodelan adalah alur produk dari setiap sektor(sebagai produsen) kepada setiap sektor yang merupakan pembeli. Alur antar-industri ini dihitung dalam selang waktu tertentu(biasanya satu tahun) dan dalam istilah moneter tertentu-- misalnya, sekian dollar nilai baja dijual kepada manufaktur mobil pada tahun lalu.

Penggunaan satuan moneter – seperti dollar, rupiah – dilakukan karena biasanya sebuah sektor atau industri dapat menjual beragam jenis produk. Misalnya pada perusahaan Apple, Inc., perusahaan tersebut menjual iPod, iPhone, Macbook, dll. Sangat mungkin sebenarnya untuk mencatat setiap penjualan yang dilakukan berdasarkan unit fisik sekaligus satuan moneternya. Karena unit fisik benar-benar merefleksikan bagaimana suatu sektor menggunakan barang dari sektor lain pada produknya. Misalnya di Apple, jumlah iPhone yang terjual lebih banyak daripada Macbook, dan keduanya memiliki harga yang berbeda, begitupun dengan bahan dan sebagainya. Pada makalah ini, permasalahan yang dikemukakan tidak serumit di dunia nyata, sehingga satuan yang digunakan akan tetap menggunakan unit fisik.

Data lain yang diperlukan pada model input-output adalah jumlah transaksi antar dua buah sektor (sektor i dan j) yang dapat kita notasikan sebagai $a_{ij,}$. Permintaan sektor j kepada sektor lain biasanya berkorelasi dengan jumlah produksi yang dilakukan oleh sektor j pada periode tertentu. Misalkan, permintaan industri kaca terhadap output dari industri silikon dioksida akan berkorelasi dengan output kaca yang dihasilkan (silikon dioksida adalah bahan baku kaca). Asumsikan bahwa perekonomian dapat dibagi menjadi n buah sektor. xi merupakan total output(produksi) dari sektor i dan fi adalah total permintaan untuk produk dari sektor i, kita dapat menuliskannya menjadi persamaan berikut [2]:

$$x_i = z_{i1} + \cdots + z_{ij} + \cdots + z_{in} + f_i = \sum_{j=1}^{n} z_{ij} + f_i$$

z_{ij} merepresentasikan penjualan antar-industri oleh sektor I kepada semua sektor j, termasuk ke sektornya sendiri (j=i). Persamaan berikut ini merepresentasikan penjualan pada setiap sektor sejumlah n [2],

$$\begin{aligned} x_1 &= z_{11} + \cdots + z_{1j} + \cdots + z_{1n} + f_1 \\ &\vdots \\ x_i &= z_{i1} + \cdots + z_{ij} + \cdots + z_{in} + f_i \\ &\vdots \\ x_n &= z_{n1} + \cdots + z_{nj} + \cdots + z_{nn} + f_n \end{aligned}$$

Oleh karena itu, banyak yang menyebut matriks tersebut adalah matriks konsumsi/ matriks produksi. Kita dapat mengubah persamaan di atas menjadi x = Zx + f dengan Z merupakan sebuah matriks dengan koefisien a_{ij}, x merupakan vektor dari total output, dan d merupakan f merupakan vektor dari permintaan. Seperti yang diperlihatkan pada persamaan x ini [2].

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{bmatrix} \text{ and } \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Sebuah kolom pada matriks tersebut merepresentasikan sumber-sumber (sources) dan besar masukan(input) untuk sektor j.

		Buying Sector				
		1	$\cdots$	j	$\cdots$	n
Selling Sector	1	z_{11}	$\cdots$	z_{1j}	$\cdots$	z_{1n}
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	i	z_{i1}	$\cdots$	z_{ij}	$\cdots$	z_{in}
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	n	z_{n1}	$\cdots$	z_{nj}	$\cdots$	z_{nn}

Gambar 2 - Matriks merepresentasikan penjualan dan pembelian

Sumber : Miller, R.E & Blair, Peter D. Input-Output Analysis, Foundations and Extensions Second Edition. Cambridge University Press, 2009.

Model input-output Leontief terdiri atas dua jenis :

1. Model terbuka

Sebagian hasil produksi dikonsumsi oleh industri itu sendiri dan sisanya dikonsumsi oleh eksternal. Misalnya, pembangkit tenaga listrik beroperasi menggunakan energi listrik yang dihasilkannya, kemudian seluruh energi yang tersisa didistribusikan kepada masyarakat. Permasalahan yang sering dimunculkan pada model ini biasanya adalah "Temukan level produksi bila permintaan ditentukan." Artinya kita harus menentukan seberapa bersar level produksi yang harus dilakukan agar permintaan eksternal terpenuhi, sekaligus terpenuhinya kebutuhan dari internal sistem. Pada model ini, apabila sistem persamaan lanjarnya kita ubah menjadi persamaan matriks, maka persamaannya akan menjadi x = Zx + f.

2. Model tertutup

Pada model ini, semua hasil produksi dikonsumsi oleh industri itu sendiri. Artinya, model ini mengasumsikan tidak ada permintaan dari luar sistem. Biasanya, masalah yang sering diselesaikan oleh model ini berkaitan dengan "Temukan harga relatif untuk setiap produk." Model input-output leontief tertutup dapat digambarkan melalui persamaan x = Ax.

III. Aplikasi Matriks Pada Model Input-Output Leontief

Seperti yang sudah penulis bahas sebelumnya, model *input-output* leontief dapat direpresentasikan menggunakan matriks. Pada bagian ini, penulis akan mencoba mencari solusi dari beberapa permasalahan terkait dengan model input-output leontief terbuka, yaitu model dengan adanya permintaan eksternal.

1. Model input-output terbuka

Pada model ini, persamaan matriks berbentuk x = Zx + f, yang menandakan ada permintaan dari luar sistem. X dan z tidak sama dengan nol. Untuk menentukan Z, kita dapat mengubah persamaan

$$I_n x - Zx = f$$
$$(I_n - Z)x = f$$
$$x = (I_n - Z)^{-1} f$$

Jika invers dari matriks $I_n - Z$ ada. $(I_n - Z)^{-1}$ disebut invers Leontief. Misalkan diberikan persoalan seperti berikut :

Berapa level produksi (x,y) yang harus dilakukan agar total keluaran seimbang (Konsumsi internal dan permintaan eksternal terpenuhi) ?

Produksi	Total keluaran = Konsumsi internal + permintaan eksternal
Pakan Ayam (kg)	A = 0.10x + y + 18000
Peternakan Ayam (ekor)	B = 0.025x + 6000

Pada contoh di atas, kita memodelkannya menggunakan matriks Z, vector f untuk permintaan pasar (eksternal), dan x yang merupakan vektor level produksi.

$$Z = \begin{bmatrix} 0.10 & 1 \\ 0.025 & 0 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 18000 \\ 6000 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Kita dapatkan solusinya dengan mengerjakan langkah sebagai berikut,

$$x = (I_2 - Z)^{-1} f$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.10 & 1 \\ 0.025 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 18000 \\ 6000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & -1 \\ -0.025 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 18000 \\ 6000 \end{bmatrix}$$

Determinan = (0.9)(1) – (-1)(-0.025) = 7/8

$$= \frac{8}{7} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.025 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18000 \\ 6000 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{8}{7} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.025 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18000 \\ 6000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 192000/7 \\ 46800/7 \end{bmatrix}$$

Maka, x adalah 192000/6 kg gandum dan y adalah 46800/7 ekor ayam. Bagaimana jika permintaan eksternal berubah? Misalkan

$$f' = \begin{bmatrix} 20000 \\ 10000 \end{bmatrix}$$

Maka kita dapat menghitungnya dengan langkah berikut

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = (I_2 - Z)^{-1} f' = \frac{8}{7} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.025 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20000 \\ 10000 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 240000/7 \\ 76000/7 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa kita tidak perlu menghitung kembali $(I_2 - Z)^{-1} f$.

Permasalah yang cukup sulit pada model ini adalah ketika kita akan menentukan matriks Z untuk perekonomian tertentu. Misalnya x diketahui, f diketahui dan $(a_{ij} x_j)_{i,j} = 1, \dots n$ diketahui. Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut dan mendapatkan matriks Z, kita dapat mengambil $(a_{ij} x_j)_{i,j} = 1, \dots n$ kemudian bagi kolom ke-j dengan x_j mulai j= 1, …, n untuk mendapatkan matriks Z [3].

V. Kesimpulan

Untuk memanipulasi keadaan perekonomian, kita harus mampu memodelkannya terlebih dahulu. Model input-output Leontief merupakan model yang cukup sederhana yang dapat membantu para ekonom untuk dapat menilai sebuah sistem dan memanipulasinya. Hal ini juga menjadi bukti bahwa aljabar lanjar – khususnya matriks dan sistem persamaan lanjar –dapat diaplikasikan dalam berbagai bidang ilmu, dan perannya begitu nyata dalam kehidupan kita sehari-hari.

Dari contoh permasalahan sederhana yang telah diberikan, dapat dilihat bahwa dengan memodelkan suatu perekonomian, kita dapat menentukan berapa level produksi yang harus dilakukan untuk memenuhi kebutuhan baik dari internal maupun eksternal.

VI. Ucapan Terima Kasih

Penulis ingin memanjatkan rasa syukur kepada Allah SWT yang telah memberikan nikmat dan karunianya, sehingga penulis dapat belajar dan menyelesaikan makalah ini dengan tepat waktu. Penulis juga ingin mengucapkan terima kasih kepada orang tua penulis yang sangat luar biasa. Makalah berjudul "Aplikasi Matriks pada Model Input-Output Leontief" ini tidak akan terwujud tanpa bimbingan Ir. Rinaldi Munir, M.T dan Drs. Judhi Santoso, M.Sc . Terimakasih atas kesabaran dan dukungannya, semoga dapat menjadi ladang amal. Teruslah berkarya.

Daftar Pustaka

[1] Strang, Gilbert. "Linear Algebra and Its Applications, 4th Edition". Brooks Cole, 2006.

[2] Miller, R.E & Blair, Peter D. *Input-Output Analysis, Foundations and Extensions Second Edition*. Cambridge University Press, 2009.

[3] Anton, Howard & Rosses, Chris. "Elementary Linear Algebra". John Wiley & Sons, 2010.

[4] Sargento, Ana L.M. "Introducing Input-Output Analysis At The Regional Level: Basic Notions and Specific Issues. 2009. (PDF). URL : http://www.real.illinois.edu/d-paper/09/09-t-4.pdf diakses pada 14 Desember 2015 pukul 20.00 WIB.

[5] Duncin, Faye & Steenge, A.E. "Mathematical Models in Input-Output Economics". (PDF). URL : http://www.economics.rpi.edu/workingpapers/rpi0703.pdf diakses pada 14 Desember 2015 pukul17.00 WIB.

[6] Höhn, Gerald. "Applications to economics: Leontief Model". (PDF). URL : https://www.math.ksu.edu/~gerald/leontief.pdf diakses pada 15 Desember 2015 pukul 8.00 WIB.

Pernyataan

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 15 Desember 2015

Febi Agil Ifdillah (13514010)