

Sistem Persamaan Lanjar dan Matriks dalam Reaksi Kimia

Friska 13514042¹

Program Studi Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

¹friska.nataniel@itb.ac.id

Abstrak—Sistem Persamaan Lanjar memiliki banyak aplikasi dalam berbagai cabang ilmu. Salah satu penerapan yang sangat dibutuhkan adalah dalam penentuan reaksi kimia. Dasar – dasar ilmu kimia yang krusial adalah dalam menentukan dan menyetarakan reaksi. Dasar tersebut bisa berlanjut ke perhitungan stokiometri, berlanjut kepada penelitian unsur, dan lainnya. Sistem persamaan lanjar dapat dibuat dalam bentuk matriks, untuk kemudian ditentukan solusinya.

Kata Kunci—gauss, matriks, reaksi, sistem persamaan lanjar

I. PENGANTAR

Dewasa ini ilmu kimia mendapat perhatian besar karena semakin dibutuhkan dalam kehidupan. Kimia memegang peranan besar dalam perkembangan zaman. Secara umum, dengan ilmu kimia manusia bisa melakukan pencampuran zat yang memberikan suatu produk yang diharapkan. Ilmu kimia juga dapat dipakai untuk menganalisis kondisi lingkungan mengingat semua unsur dalam bumi ini pasti tersusun atas suatu materi, yang mana materi tersebut dalam skala terkecilnya dapat dipelajari oleh kimia.

Bagian dasar dalam kimia adalah reaksi kimia. Reaksi kimia dipelajari oleh berbagai kalangan, mulai dari pelajar SMP / SMA sampai peneliti dan ahli sains. Reaksi kimia mengalami sejarah yang panjang hingga akhirnya memiliki penulisan seperti sekarang: $xA_aB_b + yC_cD_d \rightarrow uA_eD_f + vB_gC_h$. Dapat diperhatikan bahwa diperlukan nilai pada senyawa baik reaktan maupun produk. Nilai tersebut adalah koefisien yang perlu ditentukan. Koefisien tersebut melambangkan jumlah molekul dalam reaksi, yang harus sama pada reaktan dan produknya. Sistem persamaan lanjar diaplikasikan untuk menentukan koefisien tersebut. Mengingat sistem persamaan lanjar bisa diterapkan menjadi matriks, maka penggunaan matriks dan penerapan metode gauss akan membantu dalam menemukan koefisien tersebut.

II. TEORI YANG BERKAITAN

A. Sistem Persamaan Lanjar

Sistem persamaan lanjar terdiri dari gabungan satu atau lebih persamaan lanjar. Persamaan sendiri adalah suatu cara menyatakan ekspresi matematika, yang mana dalam ekspresi itu termuat tanda '=', variabel, konstanta, dan operasi matematika lain seperti +, -, * dan lainnya. Disebut lanjar karena variabel yang terkandung dalam persamaan – persamaan dalam sistem tersebut paling tinggi (maksimal) memiliki pangkat = 1.

Dalam sebuah sistem persamaan lanjar, umumnya manusia berusaha menentukan solusi yakni menentukan nilai dari variabel yang memenuhi sistem persamaan tersebut. Cara menyelesaikannya secara umum dibagi menjadi dua metode yakni metode langsung dan metode tak langsung. Pada metode langsung, manusia melakukan berbagai operasi misalnya eliminasi untuk mencari solusi dari sistem persamaan tersebut. Pada metode tak langsung, dicari hampiran dari penyelesaian awal, kemudian hampiran tersebut yang diproses (diperbaiki) dalam tak berhingga.

Penulisan persamaan lanjar adalah sebagai berikut

$$ax_1 + bx_2 + \dots + zx_n = c$$

Dapat dimisalkan penulisan sistem persamaan lanjar sebagai berikut

$$ax_1 + bx_2 + \dots + zx_n = c$$

$$dx_1 + ex_2 + \dots + zx_n = f$$

$$gx_1 + hx_2 + \dots + zx_n = i$$

$$jx_1 + kx_2 + \dots + zx_n = l$$

Pada bentuk tersebut x_1, x_2, \dots, x_n adalah variabel, a, b, d, e, g, h, j, k adalah koefisien dari variabel. Koefisien adalah suatu nilai yang menjadi pengali pada variabel yang ditempelnya. Sedangkan c, f, i, l adalah konstanta. Dalam sistem ini umumnya ditujukan untuk mencari nilai dari x_1, x_2, \dots, x_n .

Ada tiga kemungkinan solusi sistem persamaan lanjar: unik, banyak, dan tidak memiliki solusi.

Dapat digunakan metode eliminasi untuk menentukan nilai tersebut. Eliminasi dilakukan dengan cara membandingkan dua buah persamaan dan berusaha menghilangkan suatu variabel, sehingga pada akhirnya dapat ditemui suatu variabel beserta nilai-nya (nilai diperoleh dari konstanta). Meski cukup sederhana,

eliminasi tidak selalu menjadi metode yang paling menguntungkan. Contoh keadaan eliminasi menjadi cukup sulit adalah bila ada banyak variabel yang terlibat dalam persamaan. Manusia harus menghilangkan satu persatu variabel dan setelah melewati langkah yang panjang barulah ditemukan solusi.

Sistem persamaan linier dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks. Matriks sendiri adalah suatu fasilitas bantuan dalam matematika yang bisa digunakan untuk menentukan solusi dari permasalahan linier.

B. Matriks

Matriks adalah suatu susunan bilangan yang diatur dalam baris dan kolom, Bilangan – bilangan dalam susunan itu disebut elemen dari matriks. Suatu matriks diberi nama dengan menggunakan huruf kapital seperti A,B,C sedangkan anggotanya dituliskan dalam huruf kecil dengan notasi alamat pada matriks tersebut a_{ij} , yang mana i menyatakan indeks baris letak unsur tersebut dan j menyatakan indeks kolom letak unsur tersebut. Baris pada matriks adalah sebutan untuk elemen matriks dalam letaknya secara horizontal, sedangkan kolom adalah sebutan untuk elemen matriks dalam letaknya secara vertikal. Bentuk umum matriks adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dalam bentuk umum tersebut m adalah banyaknya baris sedangkan n adalah banyaknya kolom. Dapat diperhatikan contoh penulisan matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa a dan b, c dan d terletak pada baris yang sama; a dan c, b dan d terletak pada kolom yang sama. Adapun jumlah baris dan kolom pada matriks tidak harus selalu sama, jumlah tersebut menentukan bentuk matriks. Bila baris dan kolom tidak sama, maka matriks tersebut menjadi matriks persegi panjang, sedangkan bila sama menjadi matriks persegi. Masih ada beberapa jenis matriks lainnya seperti matriks identitas, matriks nol, matriks skalar dan lainnya. Matriks yang lebih dibahas pada makalah ini adalah matriks segitiga atas dan matriks eselon mengingat keduanya berkaitan dengan pencarian solusi yang akan lebih dibahas pada bagian eliminasi gauss. Matriks segitiga atas adalah matriks persegi yang semua unsur di bawah diagonal utamanya nol [2].

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriks segitiga bawah adalah matriks persegi yang semua unsur di atas diagonal utamanya nol[2].

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

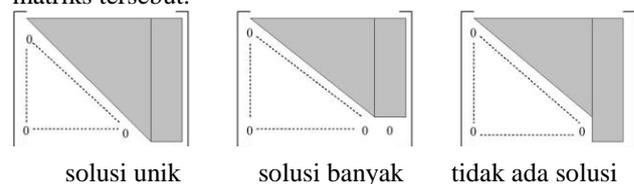
Matriks biasa dapat diubah menjadi matriks eselon melalui metode gauss. Tujuan perubahan menjadi matriks eselon adalah untuk menentukan solusi dari sistem persamaan linier. Sistem persamaan linier dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks dengan dipisahkan

antara koefisien, variabel, dan konstanta. Seluruh koefisien ditempatkan pada sebuah matriks, yang mana satu kolom mewakili satu variabel dan satu baris mewakili satu persamaan. Setelah itu, daftar variabel diletakkan dalam satu kolom (terpisah dengan matriks koefisien). Berikan tanda sama dengan '=', lalu pada ruas kiri sama dengan diberikan hasil dari persamaan yang dituliskan ke bawah. Sebagai contoh, sistem persamaan linier pada bagian sebelumnya diubah menjadi bentuk matriks. Maka untuk bentuk $AX = B$

$$A = \begin{bmatrix} a & \dots & z \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ j & \dots & z \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} c \\ f \\ \dots \\ l \end{bmatrix}$$

Matriks gabungan A dan B disebut sebagai matriks *augmented* dari sistem persamaan linier. Matriks inilah yang menjadi matriks yang digunakan dalam perhitungan metode gauss.

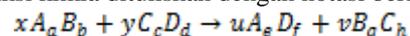
Metode gauss pada intinya berusaha mengubah matriks bisa menjadi matriks segitiga atas dengan operasi baris elementer. Bentuk segitiga tersebut dapat diselesaikan dengan silih mundur. Operasi baris elementer terdiri dari menukar dua buah baris pada matriks, mengalikan sebuah baris dengan suatu nilai (nilai tidak boleh nol), dan menambah dua buah baris (atau dengan kelipatan suatu baris). Langkah – langkah untuk melakukan eliminasi adalah berikut: hilangkan variabel x_1 dari persamaan yang bukan persamaan pertama. Tujuannya adalah menyisakan hanya sebuah x_1 pada persamaan pertama sehingga menuju ke arah matriks eselon. Setelah itu, dilakukan juga eliminasi pada persamaan lainnya, pada variabel x yang lain sehingga terbentuk matriks eselon. Proses bisa dilakukan melalui OBE hingga terwujud matriks eselon. Matriks eselon adalah matriks yang pada setiap baris, angka pertama selain 0 harus 1. Baris 0 harus terletak pada baris akhir matriks. Angka 1 pada baris di bawah baris yang memiliki angka 1 utama harus lebih kanan. Setelah terjadi matriks eselon, dapat dilihat solusi dari matriks tersebut.

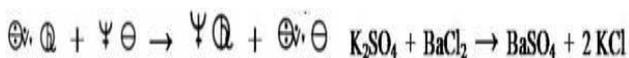


Gambar 1. Solusi Matriks

C. Reaksi Kimia

Reaksi kimia terjadi saat satu atau lebih zat mengalami perubahan menjadi zat baru, dengan keterangan zat baru tersebut memiliki sifat yang berbeda dari zat penyusunnya. Ilmu pengetahuan telah memungkinkan manusia untuk mengira produk apa yang tercipta dari persamaan reaksi dengan mempelajari pengelompokan reaksi. Reaksi kimia dituliskan dengan notasi berikut

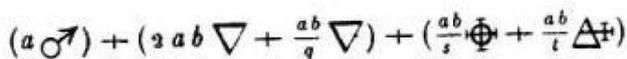




Gambar 5. Representasi Bergman

Representasi di atas sebenarnya hendak menunjukkan reaksi yang terjadi yakni $\text{K}_2\text{SO}_4 + \text{BaCl}_2 \rightarrow \text{BaSO}_4 + 2\text{KCl}$

Bila dilakukan perbandingan antara penulisan reaksi tersebut (yang dianggap sudah modern) pada zamannya dengan sekarang, terlihat perbedaan kompleksitas. Pada saat itu belum tentu semua orang mengerti alkemi. Lavoisier dalam makalahnya memberikan representasi persamaan kimia dengan lebih jelas yang untuk pertama kalinya melibatkan $+ - =$ dengan contoh sebagai berikut



Gambar 6. Representasi Lavoisier

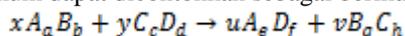
Pada persamaan di atas, dapat dilihat konsep menuju arah notasi modern. Dengan adanya lambang bagi unsur dan juga lambang untuk menandakan jumlah dari unsur. Dari perkembangan – perkembangan tersebut, akhirnya ilmu pengetahuan menemukan jalan untuk menjadikan penulisan persamaan kimia lebih praktis namun tidak menghilangkan ketepatannya. Dapat dilihat betapa matematika membantu khususnya konsep persamaan linear dan matriks. Pencarian solusi lewat matematika membuat manusia bisa mewujudkan kima teori dengan lebih baik. Dapat dikatakan persamaan linear dan matriks membantu membuat persamaan kimia menjadi lebih baik.

IV. PENERAPAN DALAM PENYETARAAN REAKSI

Dalam kimia, dibutuhkan perataan koefisien dalam persamaan linier. Persamaan dikatakan setara bila terdapat jumlah di kiri sama dengan jumlah di kanan. Menurut hukum kekekalan massa, jumlah masa produk akan sama dengan jumlah massa hasil reaksi. Setiap molekul sebelum dan sesudah reaksi harus memiliki jumlah yang sama.

Untuk melakukan penyetaraan tersebut, dapat dilakukan penerapan sistem persamaan linier. Setiap molekul dalam setiap senyawa yang menjadi reaktan pada suatu reaksi akan disamakan jumlahnya dengan setiap molekul dalam setiap senyawa pada hasil reaksi. Penyamaan tersebut dilakukan dengan memberikan koefisien sebagai pengali bagi tiap senyawa. Angka dari koefisien tersebut diatur sedemikian hingga tujuan penyetaraan reaksi tercapai.

Secara umum dapat dicontohkan sebagai berikut

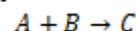


dengan

$$\begin{aligned} x \cdot a &= u \cdot e \\ x \cdot b &= v \cdot g \\ y \cdot c &= u \cdot f \\ y \cdot d &= v \cdot h \end{aligned}$$

Bentuk umum ini adalah bentuk reaksi yang umum terjadi. Meski demikian, tidak semua reaksi memiliki bentuk demikian. Pada reaksi, bisa saja dihasilkan produk yang merupakan gabungan dari reaktan di sebelah kiri

sehingga benar – benar berubah. Hal yang tetap sama adalah bahwa molekul reaktan harus sama dengan molekul produk. Misal



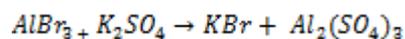
Hubungan dan penggabungan unsur, penentuan hasil apa yang terwujud antara suatu reaktan dengan reaktan lainnya dipelajari dalam kimia.

Matematika membantu penerapannya dengan memecahkan bagaimana kedua reaksi tersebut dapat setara lewat koefisien. Hal utama yang perlu dilakukan adalah menebak koefisien tersebut. Penentuan nilai koefisien tersebut dapat dilakukan dengan menebak atau melalui penerapan persamaan linier seperti yang telah disebutkan sebelumnya. Dapat dikatakan, sistem persamaan linier akan menghasilkan solusi bagi nilai – nilai yang dibutuhkan. Sebagaimana telah diungkit pada bagian teori yang berkaitan, pemecahan solusi dari sebuah sistem persamaan linier dapat dilakukan dengan berbagai metode yang salah satunya adalah perubahan dalam bentuk matriks.

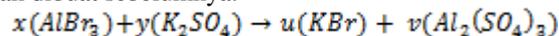
Pada matriks tersebut akan diperoleh solusi, entah solusi unik atau solusi banyak. Pada solusi unik, maka ada suatu nilai pasti untuk setiap koefisien yang dibutuhkan. Pada solusi banyak, nilai dari koefisien saling bergantung, maka pengguna perlu memilih suatu nilai sehingga tercipta reaksi yang setara.

Pembahasan mengenai penerapan sistem persamaan linier dan matriks ini akan lebih dimengerti

Contoh:



Bentuk ini dapat disesuaikan dengan bentuk umum yang telah dibuat sebelumnya:



Dapat kita pecah bagian – bagian dari senyawa menjadi

A = Al, B = Br, C = K, D = S, E = O

maka, harus didapat koefisien sehingga

untuk Aluminium (Al): $x \cdot 1 = v \cdot 2$

untuk Barium (Br) : $x \cdot 3 = u \cdot 1$

untuk Kalium (K) : $y \cdot 2 = u \cdot 1$

untuk Sulfur (S) : $y \cdot 1 = v \cdot 3$

untuk Oksigen (O) : $y \cdot 4 = v \cdot 4 \cdot 3 = v \cdot 12$

Bila diubah ke dalam bentuk persamaan linear:

$$x - 2v = 0$$

$$3x - u = 0$$

$$2y - u = 0$$

$$y - 3v = 0$$

$$4y - 12v = 0$$

Persamaan tersebut dapat diselesaikan dalam bentuk matriks berikut

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -12 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks ini dapat diubah sehingga menjadi matriks eselon dengan langkah sebagai berikut

$$\begin{array}{l} R2 - 3R1 \\ R3 - 2R4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -12 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} R2 \leftrightarrow R4 \\ R3 * -1 \\ R4/4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} R4-R3 \\ R5-R2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Setelah terbentuk matriks eselon, dapat dilihat bahwa matriks memiliki solusi banyak. Dapat dibentuk persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} x - 2v &= 0 \\ y - 3v &= 0 \\ u - 6v &= 0 \end{aligned}$$

Misalkan $v = a$

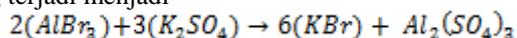
Maka didapat solusi dari persamaan ini adalah

$$x = 2a, y = 3a, u = 6a$$

Suatu persamaan yang memiliki solusi banyak memungkinkan adanya beragam nilai yang memenuhi persamaan tersebut. Dalam hal ini, berarti ada banyak nilai yang bisa digunakan untuk membuat persamaan kimia ini setara. Kita sudah mendapatkan hubungan antara masing – masing nilai variabel, ternyata nilai – nilai tersebut bergantung pada suatu nilai yakni koefisien v . Misalkan kita lakukan sulih $v = 1$. Dari sana didapatkan

$$x = 2, y = 3, u = 6$$

Nilai – nilai tersebut dimasukkan ke dalam reaksi kimia yang terjadi menjadi



Dapat dilakukan pemastian dengan cara berikut

untuk Aluminium (Al): $2 * 1 = 1 * 2$

untuk Barium (Br) : $2 * 3 = 6 * 1$

untuk Kalium (K) : $3 * 2 = 6 * 1$

untuk Sulfur (S) : $3 * 1 = 1 * 3$

untuk Oksigen (O) : $3 * 4 = 1 * 4 * 3 = 1 * 12$

Karena didapati hasil yang setara antara molekul reaktan (di sebelah kiri reaksi) dan molekul hasil (di sebelah kanan reaksi) maka penyetaraan persamaan dinyatakan berhasil.

V. KESIMPULAN

Penggunaan sistem persamaan linier dan matriks dalam penyetaraan reaksi kimia sangatlah berguna, yakni dalam menentukan koefisien pada senyawa reaktan dan produk. Penerapan ini perlu melewati proses yang panjang hingga akhirnya diterapkan seperti sekarang ini. Penggunaan

notasi modern $xA_aB_b + yC_cD_d \rightarrow uA_eD_f + vB_gC_h$ sangat memudahkan, sehingga dapat dikatakan sistem persamaan linier memberikan peranan baik dalam penyetaraan reaksi kimia.

VI. UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan terima kasih saya sampaikan kepada Tuhan YME, atas penyertaan-Nya makalah ini dapat terselesaikan. Terima kasih juga saya sampaikan kepada Pak Rinaldi Munir dan Pak Judhi sebagai dosen aljabar geometri yang telah memberikan ilmunya.

REFERENSI

<http://staff.uny.ac.id/sites/default/files/131930136/KomputasiNumerikBab2.pdf>, diakses 15 Desember
http://file.upi.edu/Direktori/FPMIPA/JUR._PEND._MAT.EMATIKA/196005011985032-ADE_ROHAYATI/Hands_Out_Aljabar_Matriks.pdf, diakses 15 Desember
<http://staff.uny.ac.id/sites/default/files/131930136/KomputasiNumerikBab2.pdf>, diakses 15 Desember
<http://scienceworld.wolfram.com/biography/Berzelius.html>, diakses 15 Desember
http://cheminor.unipa.it/storia_chimica/doku.php?id=la_nomenclatura:le_equazioni_di_reazione, diterjemahkan dengan Google Translate, diakses 15 Desember
<http://www.eoht.info/page/History+of+chemical+equations>, diakses 15 Desember
<http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2015-2016/algeo15-16.htm>, diakses 15 Desember
 Gambar1:
<http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2015-2016/algeo15-16.htm>, presentasi “3 kemungkinan solusi SPL”
 Gambar2:
<http://www.eoht.info/page/History+of+chemical+equations>, diakses 15 Desember
 Gambar3,4,5,6:
http://cheminor.unipa.it/storia_chimica/doku.php?id=la_nomenclatura:le_equazioni_di_reazione, diterjemahkan dengan Google Translate, diakses 15 Desember

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 15 Desember 2015



Friska 13514042