Penggunaan Bilangan Kompleks dalam Pemrosesan Signal

Stefanus Agus Haryono (13514097)[1]
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
[1]13514097@std.stei.itb.ac.id

***Abstrak*—Bilangan kompleks merupakan salah satu pokok bahasan dari aljabar geometri. Bilangan kompleks sendiri merupakan perpanjangan dari bilangan yang umum kita gunakan dalam kehidupan sehari – hari. Dalam kehidupan kita saat ini, dunia ini dipenuhi oleh berbagai jenis sinyal. Suara, gambar, radar, dan banyak hal lain ditransmisikan dalam bentuk sinyal. Untuk mempermudah pemrosesan sinyal yang kontigu, kita perlu merepresentasikan sinyal tersebut menjadi sinyal yang diskrit. Dalam hal ini, pemrosesan sinyal digital adalah cara untuk mengubah sinyal tersebut. Makalah ini akan membahas penggunaan bilangan kompleks dalam pemrosesan sinyal digital.**

***Kata kunci*—bilangan kompleks, sinyal, pemrosesan signal digital.**

I. PENDAHULUAN

Tanpa kita sadari, kehidupan kita dipenuhi oleh berbagai sinyal. Banyak alat – alat yang kita gunakan setiap hari mengeluarkan ataupun menggunakan sinyal. Sebagai contoh, listrik yang kita gunakan sehari – hari merupakan contoh sinyal yang paling umum. Arus listrik merupakan sinyal yang kontigu yang mengalir dari satu tempat ke tempat lain dengan membawa suatu informasi. Alat – alat yang dapat digunakan secara nirkabel juga mengaplikasikan sinyal. Dalam penggunaan alat – alat tersebut, sinyal saling dikirimkan antara pengguna dan alat, baik secara analog maupun digital. Contoh dari alat yang menggunakan teknologi ini adalah *Router* yang berfungsi menghasilkan jaringan internet nirkabel (*Wi-Fi*) sehingga pengguna dapat mengakses internet tanpa kabel dengan bantuan *router* tersebut.

Bilangan kompleks merupakan salah satu teknik matematika tingkat lanjut. Sering kita bertanya, untuk apa bilangan kompleks yang terkesan tidak nyata perlu dipelajari. Pertanyaan ini cukup umum karena dalam kehidupan sehari – hari, kita sangat jarang melihat orang menggunakan bilangan kompleks dalam kehidupan. Namun, pada kenyataannya, saat ini bilangan kompleks telah menjadi bagian penting dalam berbagai perhitungan yang diaplikasikan dalam kehidupan sehari – hari. Jaringan listrik AC yang digunakan untuk menyediakan listrik dalam rumah – rumah mengaplikasikan bilangan kompleks dalam perhitungannya.

Pemrosesan sinyal telah menjadi bahan penelitian dan pembelajaran yang penting saat ini. Apalagi, hampir semua alat yang kita gunakan menggunakan atau dapat digambarkan dengan sinyal. Dalam makalah ini, kita akan melihat penggunaan bilangan bilangan kompleks dalam pemrosesan sinyal dan aplikasinya.

Gambar 1. Router, contoh alat yang menggunakan sinyal
Sumber:http://www.netgear.com/home/products/networking/wifi-routers/

II. BILANGAN KOMPLEKS

2.1 Definisi

Bilangan kompleks merupakan bentuk lebih lanjut dari bilangan real yang kita gunakan sehari – hari. Bilangan kompleks membantu kita untuk menyelesaikan masalah matematika yang tidak bisa diselesaikan dengan menggunakan bilangan real saja.

Bilangan kompleks terdiri menjadi dua bagian, yaitu bagian yang real dan bagian yang imajiner. Jika bagian real dari suatu bilangan kompleks adalah nol, maka bilangan itu disebut imajiner sepenuhnya. Jika bagian imajiner dari bilangan kompleks adalah nol, maka bilangan ini merupakan bilangan real.

2.2 Bentuk Bilangan Kompleks

Ciri bilangan kompleks adalah terdiri dari dua bagian, yaitu bagian yang real dan bagian imajiner. Bilangan kompleks biasa dituliskan dalam notasi sebagai berikut:

z = a + ib

z = bilangan kompleks
a = bagian real
b = bagian imajiner
i = $\sqrt{-1}$

Salah satu keunikan dari bilangan kompleks adalah adanya konstanta i. i merupakan konstanta yang unik karena nilai $i^2 = -1$. Hal ini tidak pernah ditemui dalam konsep bilangan real.

2.3 Operasi Bilangan Kompleks

Sebagian besar operasi bilangan kompleks mengikuti hukum operasi bilangan real. Berikut adalah penjelasan dan contoh – contoh operasi bilangan kompleks:

a. Penjumlahan dan Pengurangan

Penjumlahan dan pengurangan bilangan kompleks dilakukan dengan cara menjumlahkan dan mengurangkan bagian real dan bagian imajiner secara terpisah:

$$(a1 + ib1) \pm (a2 + ib2) = (a1 \pm a2) + i(b1 \pm b2)$$

Contoh operasi penjumlahan:

$$(4 + i3) + (2 - i5) = 6 - i2$$

b. Perkalian

Perkalian bilangan kompleks didefinisikan dalam rumus berikut:

$$(a1 + ib1)(a2 + ib2) = (a1a2 + i^2\, b1b2 + ia1b2 + ib1a2)$$

Namun, kita ketahui bahwa nilai $i^2 = -1$, sehingga hasil perkalian bilangan kompleks dapat dituliskan sebagai:

$$(a1 + ib1)(a2 + ib2) = (a1a2 - b1b2) + i(a1b2 + b1a2)$$

Contoh operasi perkalian bilangan kompleks adalah sebagai berikut:

$$(2 + i3)(3 - i2) = 12 + i5$$

c. Pembagian

Pembagian bilangan kompleks lebih rumit dari pembagian bilangan real karena adanya komponen imajiner. Akan tetapi, pembagian bilangan kompleks dapat dipermudah dengan bantuan konjugat dari bilangan kompleks

Konjugat bilangan kompleks didapat dengan membalik tanda dari bilangan kompleks tersebut. Contohnya: konjugat dari z = a + ib adalah z* = a- ib. Hasil perkalian dari sebuah bilangan kompleks dan konjugatnya memiliki hasil yang unik:

$$zz^* = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$$

Terlihat bahwa hasil perkalian antara suatu bilangan dengan konjugatnya akan menghilangkan komponen imajiner.

Melalui penurunan rumus dan penggunaan konjugat, kita dapat menurunkan bahwa rumus untuk pembagian bilangan kompleks adalah sebagai berikut:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) + i\left(\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right)$$

Rumus tersebut didapat dengan cara mengalikan nominator dan denominator dengan konjugat dari denominator sehingga bagian denominator hanya menghasilkan bilangan real. Contoh dari pembagian bilangan kompleks:

$$\frac{(4+i2)}{(3+i2)} = \frac{(4+i2)}{(3+i2)} \cdot \frac{(3-i2)}{(3-i2)}$$

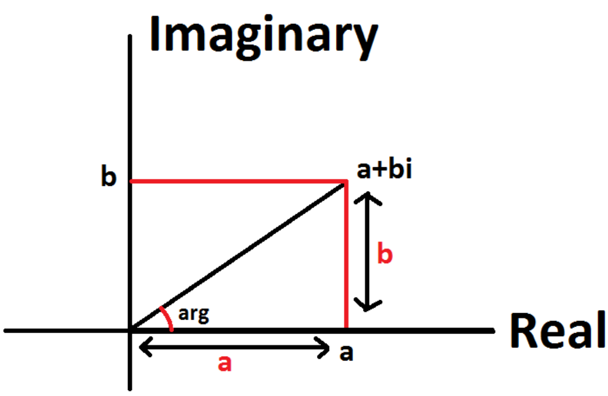
$$= \frac{16-i2}{9+4}$$

$$\frac{(4+i2)}{(3+i2)} = \left(\frac{16}{13}\right) - i\left(\frac{2}{13}\right)$$

Hukum – hukum lain dalam bilangan kompleks mengikuti hukum bilangan real, seperti hukum identitas, inverse, asosiatif, komutatif, dan distributive.

2.4 Diagram Argand

Diagram Argand merupakan cara penggambaran bilangan kompleks. Dalam diagram Argand, digunakan dua buah sumbu. Sumbu horizontal menggambarkan bilangan real, sumbu vertical menggambarkan bilangan imajiner. Dengan diagram ini, kita dapat menggambarkan sebuah bilangan kompleks sebagai titik dalam bidang dua dimensi.

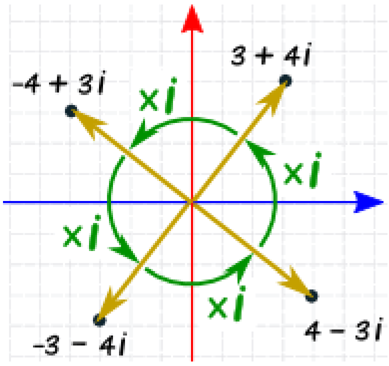


Gambar 2. Contoh Diagram Argand

Sumber:http://math.stackexchange.com/questions/153741/argand-diagram-quadrants-help

2.5 Bilangan i dalam rotasi

Bilangan i memiliki peran penting dalam bilangan kompleks, salah satunya adalah dalam rotasi. Perkalian suatu bilangan kompleks dengan bilangan i akan memutar bilangan tersebut dalam diagram argand sebesar 90º berlawanan jarum jam. Sebaliknya, perkalian dengan –i akan memutar bilangan itu sebesar 90º searah jarum jam.



Gambar 3. Contoh perkalian dengan i
Sumber:http://www.mathsisfun.com/algebra/complex-number-multiply.html

III. SINYAL

3.1 Definisi

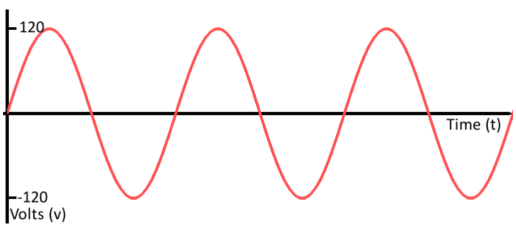
Dalam elektronika, signal adalah gelombang yang digunakan untuk mengirim informasi dari satu tempat menuju tempat lain. Salah satu bentuk signal adalah listrik, baik listrik DC maupun listrik AC. Semua sinyal memiliki frekuensi dan panjang gelombang tertentu. Panjang gelombang berbanding terbalik dengan frekuensi.

Pada sinyal, data dimasukkan dalam bentuk aliran atau gelombang melalui proses modulasi. Proses ini dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu secara analog dan secara digital. Saat ini, sinyal digital lebih umum digunakan daripada sinyal analog. Namun, masih banyak sinyal analog yang digunakan dalam kehidupan kita saat ini.

3.2 Sinyal Analog

Sinyal analog adalah sinyal dengan gelombang yang kontinu dan digambarkan dengan gelombang sinus. Sinyal analog dapat bervariasi dalam amplitudo atau frekuensi. Amplitudo dapat dilihat dari titik tertinggi dan terendah dari gelombang, sedangkan frekuensi dapat dilihat dari panjang gelombang dari ujung kiri ke ujung kanan.

Contoh sinyal analog cukup banyak di kehidupan sekitar kita. Suara yang kita dengar merupakan sinyal analog karena suara merupakan gelombang yang kontinu. Hal – hal yang kita lihat juga merupakan sinyal analog. Jam yang bergerak secara kontinu juga merupakan contoh sinyal analog.



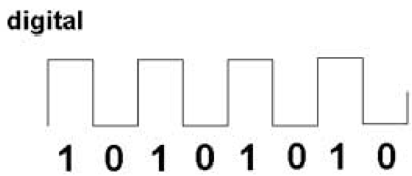
Gambar 4, Contoh sinyal analog
Sumber:https://learn.sparkfun.com/tutorials/analog vs-digital/analog-signals

Sinyal analog memiliki toleransi terhadap gangguan yang lebih rendah dibanding sinyal digital. Sinyal analog memanfaatkan *bandwidth* dengan baik dan mudah dimanipulasi secara matematika. Namun, untuk menggunakan sinyal analog, penerima dan pengirim sinyal harus benar – benar cocok agar sinyal dapat diterima dengan baik.

3.3 Sinyal Digital

Sinyal digital merupakan sinyal yang menggunakan nilai diskrit (tidak kontinu). Sinyal digital digambarkan dengan gelombang persegi (*square waves*). Sinyal digital umum digunakan dalam pemrosesan computer. Sinyal digital juga dapat dideskripsikan menggunakan kode biner (0 dan 1).

Sinyal digital memberikan sinyal yang konstan dan konsisten sehingga lebih banyak digunakan saat ini. Contohnya, jam tangan analog mulai banyak digantikan oleh jam digital yang menunjukkan waktu dalam bentuk numeric secara digital. Contoh lain sinyal digital adalah rekaman suara dapat kita simpan dalam computer menggunakan sinyal digital.



Gambar 5. Sinyal digital dengan kode biner
Sumber:http://study.com/academy/lesson/what-are-digital-and-analog-signals-definition-lesson-quiz.html

Sinyal digital lebih tahan gangguan dibandingkan dengan sinyal analog. Namun, sinyal digital dapat menjadi korup/rusak jika terdapat gangguan yang berlebih yang menyebabkan data berubah. Saat ini, sudah banyak teknik pengecekan error untuk sinyal digital sehingga kesalahan dapat dikurangi dan dicegah. Sinyal digital juga dapat digunakan menggunakan pengirim sinyal dan penerima sinyal yang sederhana, tidak seperti sinyal analog yang harus benar – benar sesuai.

IV. PEMROSESAN SINYAL

4.1 Pemrosesan Sinyal Analog

Pemrosesan sinyal analog adalah pemrosesan sinyal yang dilakukan pada sinyal analog yang bersifat kontinu dengan metode yang analog. Analog berarti secara matematika, hal itu direpresentasikan sebagai nilai yang kontinu.Nilai analog biasanya direpresentasikan sebagai tegangan listrik, arus, atau daya listrik.

Dalam pemrosesan sinyal analog, terdapat beberapa rumus dan metode yang sering digunakan. Penjelasannya adalah sebagai berikut:

a. Convolution

Konsep *convolution* membantu kita untuk menem;ukan sinyal output dengan cara menggabungkan fungsi sistem dengan sinyal input. Secara matematika, *convolution* adalah operasi matematika antara dua fungsi yang menghasilkan sebuah fungsi baru yang merupakan hasil modifikasi dari salah satu fungsi yang diambil.

Simbol yang digunakan untuk *convolution* adalah symbol *. *Convolution* dirumuskan dalam bentuk integral sebagai berikut:

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_a^b x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

Pada umumnya, nilai a = -∞ dan b = +∞.

b. Transformasi Fourier

Transformasi Fourier mengubah sebuah fungsi dalam domain waktu menjadi sebuah fungsi dalam domain frekuensi. Bentuk transformasi Fourier disebut representasi dengan domain frekuensi. Fungsi dalam domain waktu pasti memiliki sebuah fungsi yang setara dalam domain frekuensi. Tidak semua fungsi dapat dilakukan transformasi Fourier. Syarat agar pada fungsi dapat dilakukan transformasi Fourier adalah:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt < \infty$$

Transformasi Fourier sendiri dirumuskan dalam bentuk integral:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

Terkadang, kita juga ingin menggunakan inverse dari transformasi Fourier. Inverse transformasi ini digunakan untuk mentransformasi fungsi dari domain frekuensi menuju domain waktu, yang dirumuskan sebagai:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Dapat dilihat bahwa dalam transformasi ini terdapat komponen yang merupakan bilangan kompleks.

Transformasi Fourier digunakan dalam pemrosesan sinyal seperti sinyal radio, gelombang cahaya, gelombang seismic, hingga gambar.

c. Transformasi Laplace

Transformasi Laplace adalah transformasi integral yang menerima sebuah fungsi dengan variable bilangan real positif *t* (umumnya waktu) menjadi sebuah fungsi dengan variable kompleks *s* (frekuensi). Syarat untuk transformasi Laplace adalah *t* >0. Transformasi Laplace dapat digunakan pada sinyal waktu yang kontinu, baik sinyal yang stabil maupun tidak stabil.

Transformasi Laplace dirumuskan sebagai berikut:

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

Sama seperti Transformasi Fourier, kadang kita ingin menggunakan inverse transformasi Fourier yang mengubah fungsi dari domain frekuensi menjadi domain waktu yang dirumuskan sebagai:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(s)e^{st}\,ds$$

Dalam Transformasi Laplace, variable s dalam e^s merupakan komponen bilangan kompleks frekuensi dalam bentuk:

s = a + ib
a = bilangan real
b = bilangan real yang menjadi komponen bilangan kompleks

Dalam kehidupan sehari – hari, kebanyakan parameter fisika direpresentasikan oleh persamaan diferensial. Contohnya adalah tegangan yang melewati inductor merupakan persamaan diferensial. Dalam kasus seperti ini, transformasi laplace digunakan untuk menganalisis sinyal seperti ini jika sinyal tersebut bersifat kontinu.

4.2 Pemrosesan Sinyal Digital

Pemrosesan sinyal digital adalah pemrosesan sinyal yang dilakukan pada sinyal digital yang bersifat diskrit, baik waktu diskrit, frekuensi diskrit, atau domain diskrit yang lain. Bentuk aplikasi pemrosesan sinyal digital adalah pemrosesan sinyal audio, sinyal radar, gambar digital, dan masih banyak lagi.

Dalam pemrosesan sinyal digital, pada umumnya peneliti mempelajari pemrosesan sinyal dalam domain tertentu. Domain – domain tersebut adalah sebagai berikut:

a. Domain Ruang dan Waktu

Pemrosesan dalam domain ruang dan waktu adalah analisis terhadap sinyal merupakan fungsi terhadap waktu. Salah satu metode paling umum digunakan dalam domain ini adalah filter digital. Filter digital adalah sistem yang melakukan operasi pada sinyal waktu diskrit untuk menurunkan atau meningkatkan aspek tertentu dari sinyal tersebut.

b. Domain frekuensi

Sinyal dalam domain ruang dan waktu dapat ditransformasikan menuju domain frekuensi menggunakan transformasi Fourier yang telah dijelaskan pada bagian sebelumnya. Bedanya, untuk sinyal yang diskrit, transformasi yang digunakan merupakan transformasi Fourier diskrit

Transformasi Fourier diskrit merupakan bentuk ekuivalen dari Transformasi Fourier, namun digunakan untuk sinyal yang bersifat diskrit, yaitu memiliki nilai hanya di tempat tertentu dan terpisah – pisah (contoh: data yang terbatas dan terpisah – pisah). Dalam transformasi ini, karena setiap data bentuknya terpisah – pisah dan memiliki jumlah terbatas, transformasi Fourier diskrit dirumuskan dalam bentuk penjumlahan sebagai berikut:

$$X_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-j2\pi kn/N}$$

Sedangkan inverse transformasi Fourier diskrit dirumuskan sebagai:

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{j2\pi kn/N}$$

Pemrosesan sinyal dalam domain frekuensi umumnya bertujuan untuk mengecek ciri dari sinyal tersebut.

c. Transformasi Z

Pada sinyal analog, biasanya kita mengubah sinyal ke domain *s* menggunakan transformasi Laplace. Dalam sinyal digital, sinyal diubah dan dianalisis dalam domain *z* yang dihasilkan dari transformasi Z. Transformasi Z mengubah sinyal waktu diskrit menjadi sinyal dalam domain frekuensi. Transformasi Z dirumuskan sebagai:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

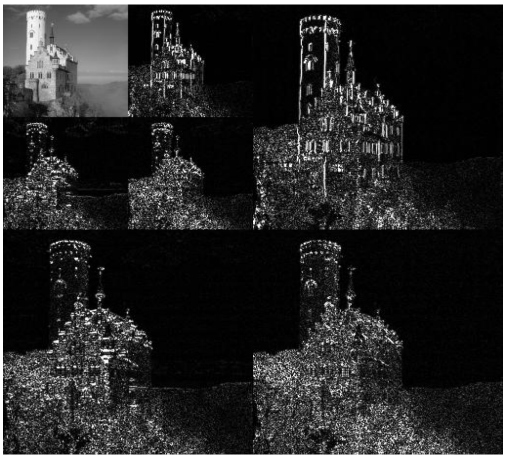
Dalam transformasi ini, n merupakan sebuah integer, sedangkan z merupakan sebuah bilangan kompleks dalam bentuk:

$$z = Ae^{j\phi} = A(\cos\phi + j\sin\phi)$$

Transformasi ke domain z menyediakan cara untuk menggambarkan frekuensi digital ke komponen real dan imajiner.

d. Transformasi wavelet diskrit

Wavelet adalah osilasi seperti gelombang dengan amplitude yang dimulai pada 0, meningkat, dan menurun kembali ke 0. Transformasi menuju wavelet merupakan transformasi waktu dan frekuensi yang cukup populer. Dalam transformasi wavelet diskrit, wavelet yang terbentuk berupa sampel yang diskrit. Kelebihan transformasi wavelet adalah transformasi ini mampu menerima informasi berupa frekuensi, dan informasi mengenai lokasi dalam waktu.



Gambar 6. Contoh transformasi wavelet diskrit pada JPEG 2000

Sumber: https://en.wikipedia.org/wiki/JPEG_2000

V. KESIMPULAN

Tanpa kita sadari, bilangan kompleks sangat banyak digunakan, terutama dalam berbagai sinyal. Sinyal – sinyal tersebut telah menjadi bagian penting dalam kehidupan kita, seperti listrik, gambar digital, suara audio, dan sinyal – sinyal lain. Hadirnya bilangan kompleks sangat mendukung perkembangan sinyal sehingga teknologi dapat semakin maju seperti saat ini. Penggunaan bilangan kompleks dan pemrosesan sinyal tentu akan terus berkembang dan menghasilkan teknologi – teknologi baru yang lebih baik dari sebelumnya.

VI. UCAPAN TERIMA KASIH

Pertama – tama penulis mengucapkan terima kasih kepada Tuhan Yang Maha Esa karena atas berkat dan pertolongan-Nya penulis dapat membuat dan menyelesaikan makalh ini dengan baik. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Bapak Rinaldi Munir dan Bapak Judhi atas pembelajaran dan ilmu aljabar geometri, termasuk teori tentang bilangan kompleks. Terakhir, penulis juga ingin berterima kasih kepada orang tua yang selalu mendukung, menolong, dan mendoakan penulis sehingga penulis dapat terus menuntut ilmu di Institut Teknologi Bandung.

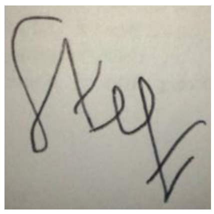
REFERENCES

[1] Vince, John. 2008. Geometric Algebra for Computer Graphics. London: Springer-Verlag.
[2] http://searchnetworking.techtarget.com/definition/signal, diakses pada 13 Desember 2015
[3] http://mathworld.wolfram.com, diakses pada 14 Desember 2105
[4] http://dspguide.com, diakses pada 14 Desember 2015
[5] http://www.diffen.com/difference/Analog_vs_Digital,diakses pada 14 Desember 2015

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 14 Desember 2015



Stefanus Agus Haryono - 13514097