Penerapan Bilangan Kompleks pada Rangkaian RLC

Hishshah Ghassani - 13514056
Program Studi Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
hishshah@students.itb.ac.id

***Abstrak*— Rangkaian RLC adalah salah satu rangkaian listrik yang banyak digunakan pada kehidupan sehari-hari. Perhitungan pada rangkaian RLC tidak terlalu sulit apabila kita memahami bilangan kompleks dengan baik, karena pada perhitungannya, rangkaian RLC banyak menggunakan konsep bilangan kompleks. Pada makalah ini, dibahas perhitungan pada rangkaian RLC yang menggunakan bilangan kompleks. Pada makalah ini juga dibahas bentuk-bentuk penyajian bilangan kompleks dan transformasinya.**

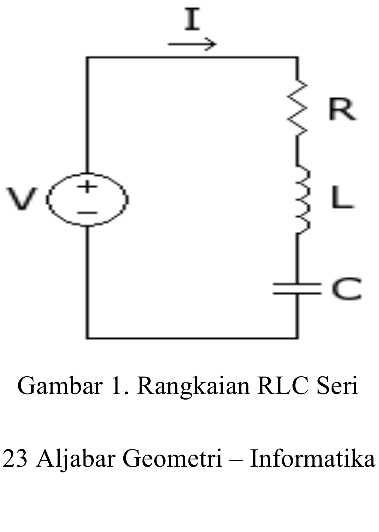
***Kata Kunci*— bilangan kompleks, rektangular, polar, rangkaian RLC, resistor, induktor, kapasitor, impedansi.**

I. PENDAHULUAN

Bilangan kompleks adalah himpunan bilangan terbesar di dalam matematika. Secara umum, bilangan kompleks terdiri dari bilangan real dan bilangan imajiner. Dalam bilangan kompleks X + jY, suku pertama (X) adalah bagian bilangan real sedangkan suku kedua (jY) adalah imajiner. Jika X = 0, maka bilangan kompleks adalah bilangan imajiner murni yang terletak pada sumbu j. Sedangkan apabila Y – 0, maka bilangan kompleks adalah bilangan real yang terletak pada sumbu real. Bilangan imajiner didefinisikan sebagai

$$j = \sqrt{-1}$$

Salah satu aplikasi dari bilangan kompleks pada bidang elektro adalah pada rangkaian RLC. Rangkaian RLC adalah rangkaian listrik yang di dalamnya mengandung resistor, induktor, dan kapasitor yang berhubungan satu sama lain, baik secara seri maupun secara paralel. Pada perhitungannya, rangkaian RLC banyak menggunakan bilangan kompleks, seperti perhitungan tegangan, impedansi, dan arus maksimum.



Gambar 1. Rangkaian RLC Seri

II. TEORI DASAR

A. Bilangan Kompleks

Seperti yang dijelaskan pada bagian I, bilangan kompleks terdiri dari bilangan real dan bilangan imajiner, di mana bilangan imajiner didefinisikan sebagai akar kuadrat dari -1. Munculnya bilangan kompleks dapat dihasilkan dari persamaan matematika sederhana, misalnya persamaan kuadrat:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Salah satu cara mencari solusinya adalah dengan rumus abc, yaitu:

$$x_{1,2=} \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

dengan diskriminan D = b^2 – 4ac. Untuk diskriminan besar dari sama dengan nol, maka akar-akarnya bersifat real. Sedangkan untuk kasus diskriminan kecil dari nol, menyebabkan akar-akarnya tidak real karena akan mengandung bilangan imajiner, sehingga akar persamaannya termasuk bilangan kompleks. Jika diskriminan tersebut ditulis sebagai $-d^2$, maka akar kompleksnya adalah:

$$x_{1,2=} \frac{-b \pm j\sqrt{d}}{2a}$$

Pada persamaan tersebut, x_1 dan x_2 dikatakan sekawan karena apabila dikalikan menghasilkan bilangan real.

Bilangan kompleks dapat melakukan operasi tambah, kurang, kali, dan bagi seperti bilangan real. Namun, ada beberapa sifat bilangan kompleks yang menyebabkan pengoperasian matematika pada bilangan kompleks berbeda dengan bilangan real. Berikut sifat-sifat operasi matematika pada bilangan kompleks:

1. Penjumlahan

Penjumlahan pada bilangan kompleks dapat dinyatakan dengan:

$$(a + bj) + (c + dj) = (a + c) + (b + d)j$$

Penjumlahan bilangan kompleks hampir sama dengan penjumlahan bilangan real biasa. Bagian real dijumlahkan dengan bagian real (a + c), sedangkan bagian imajiner dijumlahkan dengan bagian imajiner pula (b + d). Berikut contoh penjumlahan bilangan kompleks:

$$\begin{aligned}(3 + 5j) + (2 + 2j) &= (3 + 2) + (5 + 2)j \\ &= 5 + 7j\end{aligned}$$

2. Pengurangan

Pengurangan pada bilangan kompleks dapat dinyatakan dengan

$$(a + bj) - (c + dj) = (a - c) + (b - d)j$$

Pengurangan bilangan kompleks tidak jauh berbeda dengan penjumlahan, hanya saja pengurangan terjadi pada bagian yang sama. Berikut contoh pengurangan bilangan kompleks:

$$(3 + 5j) - (2 + 2j) = (3 - 2) + (5 - 2)j$$
$$= 1 + 3j$$

3. Perkalian

Perkalian pada bilangan kompleks dapat dinyatakan dengan:

$$(a + bj) * (c + dj) = a * c + a * dj + bj * c + bj * dj$$
$$= (a * c - b * d) + (a * d + b * c)j$$

sehingga

$$(a + bj) * (c + dj) = (a * c - b * d) + (a * d + b * c)j$$

j adalah akar kuadrat dari -1, sehingga perkalian bj*dj akan menghasilkan – b*d. Bilangan tersebut sudah tidak imajiner karena sudah tidak mengandung j. Berikut contoh perkalian bilangan kompleks:

$$(3 + 5j) * (2 + 2j) = (3 * 2 - 5 * 2) + (3 * 2 + 5 * 2)j$$
$$= -4 + 16j$$

4. Pembagian

Pembagian pada bilangan kompleks dapat dinyatakan dengan:

$$\frac{a + bj}{c + dj} = \frac{a + bj}{c + dj} * \frac{c - dj}{c - dj}$$
$$= \frac{(a + bj) * (c - dj)}{c^2 - d^2}$$
$$= \frac{(a * c + b * d) + (-a * d + b * c)j}{c^2 - d^2}$$

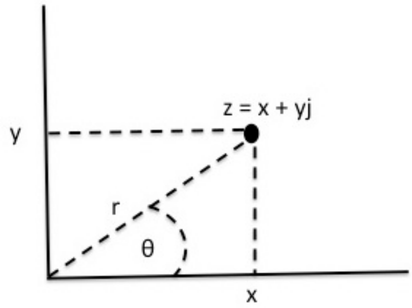
Pembagian pada bilangan kompleks memang sedikit lebih rumit daripada operasi lainnya. Hal ini dikarenakan kita harus membuat penyebut menjadi sederhana. Dengan memanfaatkan sifat $(x + y) * (x – y) = (x^2 – y^2)$, maka kita kalikan penyebut dengan sekawannya (c – dj). Agar tidak mengubah persamaan, maka pembilang juga dikalikan dengan (c – dj). Berikut adalah contoh pembagian bilangan kompleks:

$$\frac{2 + 2j}{3 + 5j} = \frac{(2 * 3 + 2 * 5) + (-2 * 5 + 2 * 3)j}{3^2 - 5}$$
$$= \frac{16 - 4j}{-16} = -1 + \frac{1}{4}j$$

Bilangan kompleks dapat direpresentasikan dengan beberapa cara. Berikut adalah penyajian bilangan kompleks:

1. Bentuk Rektangular

Misalkan ada bilangan kompleks z = x + yj, di mana x adalah bagian real dan y adalah bagian imajiner. Maka bilangan kompleks tersebut dapat digambarkan pada bidang *Argand* seperti pada gambar berikut ini:



Gambar 2. Bentuk Rektangular

Pada gambar di atas, r adalah garis yang terbentuk dari titik awal ke titik z, sedangakan θ adalah sudut yang terbentuk dari garis r dengan sumbu x. Semua titik yang berada pada sumbu x mewakili garis bilangan real.

2. Bentuk Polar

Dengan anggapan bahwa:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

dan

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

maka

$$x + yj = r\cos\theta + \text{jr}\sin\theta) = r(\cos\theta + \text{j}\sin\theta)$$

Untuk mempersingkat bentuk penulisan, bentuk $r(\cos\theta + \text{j}\sin\theta)$ sering ditulis sebagai $r\ cis\theta$. Persamaan bentuk polarnya menjadi:

$$r < \theta$$

3. Bentuk Eksponen

Bentuk eksponen dari bilangan kompleks adalah:

$$x + yj = r\,e^{j\theta}$$

Bentuk ini diperoleh dari bentuk polar, dengan hubungan fungsi trigonometri dengan fungsi eksponensial kompleks:

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} = Im(e^{j\theta})$$
$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} = Re(e^{j\theta})$$

Bilangan kompleks sangat berkaitan dengan eksponensial. Oleh karena itu, dapat dicari logaritma natural dari bilangan kompleks. Misalkan:

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

maka

$$\ln j = j\frac{\pi}{2}$$

Kemudian, jika

$$z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$$

maka

$$\ln z = \ln r + \ln(\cos\theta + j\sin\theta) = \ln r + \ln e^{i\theta}$$
$$\ln z = \ln r + e^{i\theta}$$

Bentuk bilangan kompleks dapat ditransformasi dari satu bentuk ke bentuk lainnya. Berikut adalah persamaan transformasi antara bentuk rektangular dan polar, dan sebaliknya:

1. Transformasi dari bentuk rektangular ke bentuk polar

Apabila didefinisikan dalam bentuk polar r < θ, maka dalam bentuk rektangular, di mana persamaannya z = x + jb, didefinisikan x = rcos θ, dan y = rsinθ.

2. Transformasi dari bentuk polar ke bentuk rektangular

a. Apabila bentuk rektangularnya z = x + jb, maka bentuk persamaan polarnya adalah:

$$r < \theta$$

dengan

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

b. Apabila bentuk rektangularnya z = -x + jb, maka bentuk persamaan polarnya adalah:

$$r < \theta$$

dengan

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = 180 - \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

c. Apabila bentuk rektangularnya z = -x - jb, maka bentuk persamaan polarnya adalah:

$$r < \theta$$

dengan

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = 180 + \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

d. Apabila bentuk rektangularnya z = x - jb, maka bentuk persamaan polarnya adalah:

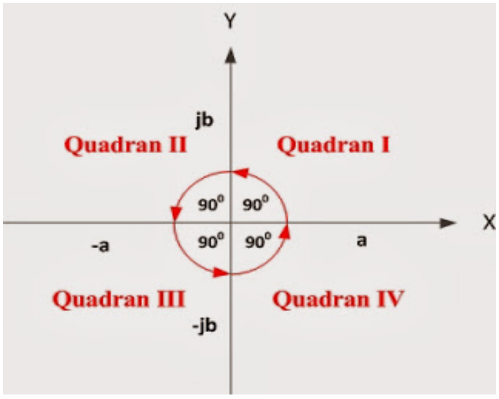
$$r < \theta$$

dengan

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = 360 - \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

Untuk lebih singkatnya, persamaan-persamaan di atas dapat dijelaskan denan gambar berikut:



Gambar 3. Kuadran pada Koordinat Kartesius

B. Rangkaian RLC

Salah satu jenis rangkaian listrik adalah terdiri dari resistor, induktor, dan kapasitor. Karena terdiri dari resistor (R), induktor (L), dan kapasitor (C), maka rangkaian tersebut dinamakan rangkaian RLC. Rangkaian ini membentuk osilasi harmonik dan akan beresonansi dalam cara yang sama sebagai rangkaian LC. Sebelum masuk ke pembahasan rangkaian RLC, penulis akan menjelaskan terlebih dahulu komponen-komponen pada rangkaian RLC:

1. Resistansi, Reaktansi, dan Impedansi

Resistansi adalah hambatan yang diberikan oleh resistor. Reaktansi adalah hambatan yang bersifat reaksi terhadap perubahan arus dan tegangan. Nilainya berubah-ubah tergantung dengan perbedaan fase dari arus dan tegangan. Sedangkan impedansi adalah keseluruhan dari sifat hambatan terhadap arus, baik mencakup resistansi, reaktansi, atau keduanya. Impedansi sering juga disebut hambatan dalam. Satuan ketiga jenis hambatan ini adalah ohm (Ω).

2. Induktor dan Kapasitor

Induktor adalah komponen listrik yang menyimpan energi listrik dalam bentuk energi magnetik. Induktor menghambat arus dengan cara menurunkan tegangan, berbanding lurus dengan laju perubahan arus. Menurut hukum Lenz, tegangan terinduksi selalu dalam polaritas sedemikian sehingga menjaga nilai arus sama seperti sebelumnya. Jadi, ketika arus meningkat, tegangan terinduksi akan melawan aliran elektron. Sedangkan ketika arus menurun, polaritas akan berbalik dan mendorong aliran elektron. Hal ini disebut sebagai reaktansi. Dalam indukor, energi disimpan pada medan magnetnya. Berikut hubungan antara tegangan dengan laju perubahan arus melalui induktor:

$$V = L\,\frac{di}{dt}$$

dengan V adalah tegangan, L adalah induktor, dan i adalah arus.

Simbol reaktansi induktif adalah X_L. Reaktansi induktif dapat dihitung dengan persamaan berikut:

$$X_L = 2\,\pi f\,L$$

dengan X_L dalam ohm, f (frekuensi) dalam Hertz, dan L dalam Henry.

Kapasitor adalah komponen listrik yang menyimpan muatan listrik. Tidak seperti induktor, kapasitor justru membolehkan arus untuk melewatinya, berbanding lurus dengan laju perubahan tegangan. Arus yang melalui kapasitor adalah reaksi dari perubahan tegangan pada kapasitor tersebut. Dalam kapasitor, energi disimpan dalam medan listriknya. Berikut hubungan antara arus dengan laju perubahan tegangan melalui kapasitor:

$$i = C\,\frac{dV}{dt}$$

dengan V adalah tegangan, C adalah kapasitor, dan i adalah arus.

Simbol reaktansi kapasitif adalah X_C. Reaktansi kapasitif dapat dihitung dengan persamaan berikut:

$$X_c = \frac{1}{2\,\pi f\,C}$$

dengan X_C dalam ohm, f (frekuensi) dalam Herts, dan C dalam Farad (F).

Setelah kita mendapatkan reaktansi induktor dan reaktansi kapasitor, besar impedansi pada rangkaian dapat dicari dengan persamaan

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Selain impedansi, kita juga dapat mencari tegangan efektif pada rangkaian dengan persamaan

$$V_{ef} = \sqrt{{V_R}^2 + (V_L - V_C)^2}$$

sehingga sudut fase rangkaiannya adalah

$$\tan \varphi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

Sifat rangkaian RLC tergantung pada reaktansi induktif dan reaktansi kapasitif pada rangkaian tersebut. Apabila reaktansi induktif lebih besar dari reaktansi kapasitif, maka rangkaian tersebut bersifat induktif. Sebaliknya, apabila reaktansi induktif lebih kecil dari reaktansi kapasitif, maka rangkaian tersebut bersifat kapasitif. Sedangkan apabila reaktansi induktif dan reaktansi kapasitifnya sama, maka rangkaian tersebut bersifat resistif dan akan terjadi resonansi yang besar frekuensinya dapat diketahui dengan persamaan:

$$f_{res} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{L.C}}$$

Apabila rangkaian bersifat resistif, maka impedansi rangkaian mencapai minimum dan besarnya sama dengan nilai resistor. Saat impedansinya minimum, arus yang mengalir mencapai maksimum.

Pada arus bolak-balik (Alternating Current – AC), tegangan sinusoida dapat dituliskan dalam bentuk persamaan tegangan sebagai fungsi waktu, yaitu:

$$V = V_m \sin(2\pi f t)$$

III. BILANGAN KOMPLEKS PADA RANGKAIAN RLC

Bilangan kompleks pada rangkaian RLC diterapkan saat perhitungan-perhitungan pada rangkaian. Salah satu perhitungan yang memakai bilangan kompleks adalah impedansi. Pada bagian Dasar Teori, sudah dijelaskan bahwa impedansi adalah keseluruhan dari sifat hambatan. Sudah dijelaskan juga persamaan mencari besar impedansi. Namun, untuk mencari impedansi sebenarnya memakai bilangan kompleks, dengan persamaan:

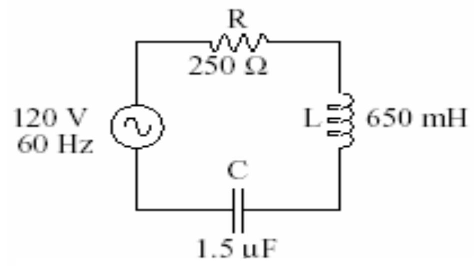
$$z = R + jX_L + jX_C$$
$$z = Ze^{i\theta}$$

Untuk mengetahui apakah arus atau tegangan yang bergetar lebih dulu, dapat digunakan hukum ohm:

$$I = \frac{V}{z} = \frac{V_0}{Z} e^{j(\theta - \phi)}$$

yang menunjukkan arusnya ketinggalan fase sejauh ϕ dari tegangannya.

Dalam penyelesaian soal rangkaian RLC, kita harus mengubah bentuk bilangan kompleks agar dapat melakukan operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Oleh karena itu, dibutuhkan kemampuan untuk transformasi bentuk bilangan kompleks rektangular ke polar maupun sebaliknya. Setiap operasi penjumlahan dan pengurangan, sebaiknya digunakan bentuk rektangular. Sedangkan operasi perkalian dan pembagian, digunakan bentuk polar. Berikut adalah contoh soal rangkaian RLC yang menggunakan bilangan kompleks[5]:



Gambar 4. Soal Rangkaian RLC

Untuk menghitung impedansi total pada rangkaian tersebut, kita perlu mencari reaktansi induktif dan reaktansi kapasitif:

$X_L = 2\pi f\, L = (2)(3,14)(60)(650 \text{ x } 10^{-3}) = 244,92\ \Omega$

$X_C = \frac{1}{2\,\pi f\, C} = \frac{1}{(2)(3,14)(60)(1,5\, x\, 10^{-6})} = 1769,28\ \Omega$

Setelah mendapatkan reaktansi induktif dan reaktansi kapasitif, dicari impedansi masing-masing komponen:

$Z_R = (250 + j0)\ \Omega = 250\ \Omega$

$Z_L = (0 + j244,92)\ \Omega$

$Z_C = (0 - j1769,28)\ \Omega$

Kemudian, kita dapat mencari impedansi total dengan cara menjumlahkan semua impedansi di atas:

$Z_{total} = ((250) + (0 + j244,92) + (0 – j1769,28))\ \Omega$

$Z_{total} = ((250 + 0 + 0) + j(244,92 – 1769,28))\ \Omega$

$Z_{total} = (250 – j1524,36)\ \Omega$

Apabila ditransformasi ke bentuk polar, impedansi totalnya menjadi:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{250^2 + 1524,36^2} = 1544,72$$

$$\theta = 360 - \tan^{-1}\frac{y}{x} = 360 - \tan^{-1}\frac{1524,36}{250}$$
$$= 360 - 1,4 = 358,59$$

$Z_{total} = 1544,72\ \Omega\ < 358,59^0$

Jika diketahui impedansi totalnya, kita juga dapat mencari arus total pada rangkaian tersebut:

$$I_{total} = \frac{V_{total}}{Z_{total}} = \frac{120 < 0}{1544,72 < 358,59} = 0.078\ A < -358,59°$$

IV. KESIMPULAN

Kesimpulan yang dapat diambil dari pemaparan di atas adalah:

- Bilangan kompleks memiliki banyak penerapan dalam kehidupan, salah satunya dalam perhitungan rangkaian listrik.
- Bilangan kompleks terdiri dari bilangan real dan bilangan imajiner.
- Pada bilangan kompleks, dapat dilakukan operasi aritmatika seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Operasi-operasi tersebut hampir sama dengan operasi aritmatika pada bilangan real.
- Bilangan kompleks memiliki beberapa bentuk

penyajian, di antaranya bentuk rektangular, bentuk polar, dan bentuk eksponen.

- Dapat dilakukan transformasi dari satu bentuk ke bentuk yang lain.
- Rangkaian RLC adalah rangkaian listrik yang mengandung resistor, induktor, dan kapasitor.
- Pada perhitungan rangkaian RLC, bilangan kompleks digunakan dalam impedansi, arus, tegangan, dan lain-lain.

VII. UCAPAN TERIMA KASIH

Pada bagian ini, penulis ingin mengucapkan syukur kepada Allah SWT atas nikmat, rahmat, dan berkah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan makalah ini. Terima kasih juga penulis sampaikan kepada orangtua dan keluarga, yang selalu mendukung dan memberikan semangat kepada penulis dalam menjalankan tugas-tugas kuliah. Ucapan terima kasih juga penulis ucapkan kepada Pak Rinaldi Munir dan Pak Judhi Santoso, selaku dosen mata kuliah IF2123 Aljabar Geometri, atas bimbingan, dukungan, dan referensi-referensi yang sangat membantu dalam penyelesaian makalah ini.

DAFTAR REFERENSI

[1] https://id.wikipedia.org/wiki/Sirkuit_RLC, diakses pada 15 Desember 2015 pukul 7:39.

[2] http://tan.awardspace.com/pubi/vk1.PDF, diakses pada 15 Desember 2015 pukul 8:20.

[3] Vince, John. 2008. *Geometric Algebra for Computer Graphics*. London: Springer.

[4] http://runaldysahputra.blogspot.co.id/2013/11/bilangan-kompleks-bentuk-rectangular.html, diakses pada 15 Desember 2015 pukul 15:07.

[5] http://web.ipb.ac.id/~tepfteta/elearning/media/Energi%20dan%20Listrik%20Pertanian/MATERI%20WEB%20ELP/Bab%20VIII%20RANGKAIAN%20RLC/indexRLC.htm, diakses pada 15 Desember 2015 pulul 15:36.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 16 Desember 2015

Hishshah Ghassani – 13514056