

Penerapan Payoff Matrix dalam Game Theory

Luthfi Kurniawan 13514102¹

Program Studi Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

¹luthkur@s.itb.ac.id

Abstract—Game Theory adalah salah satu bidang matematika yang membahas tentang pengambilan keputusan untuk mendapat keuntungan maksimum dalam suatu game, bidang ini memiliki aplikasi terhadap banyak bidang di berbagai ilmu, game theory memiliki komponen utama yaitu Payoff matrix yang bisa diselesaikan menggunakan ilmu dari aljabar linier yang berfokus terhadap penyelesaian matriks, makalah ini membahas tentang penyelesaian matriks di game theory menggunakan ilmu-ilmu aljabar linier

Keywords—Game Theory, Sistem Persamaan Linier, Payoff Matrix, Permainan

I. PENDAHULUAN

Game theory adalah bidang matematika yang berkuat di dalam pemodelan kerjasama dan konflik antara pihak-pihak yang bisa mengambil keputusan secara rasional. Dalam Game Theory yang dianalisa adalah tentang strategi apa yang bisa diambil oleh pihak yang bersangkutan agar mendapat imbalan yang paling optimal. Game theory banyak digunakan dalam banyak bidang dari ekonomi, psikologi, politik, ilmu komputer, biologi, dan poker. Terapan game theory banyak sekali dari pengambilan keputusan strategy militer, pengambilan keputusan saat bernegosiasi, pengambilan keputusan waktu bermain catur, dan masih banyak lagi.

Dewasa ini, Game Theory sangat berkembang walau bidang ini relatif masih muda. Banyak sekali Peneliti di bidang game theory yang mendapatkan penghargaan nobel.

Dari sini terlihat bahwa Game Theory memiliki pengaruh yang besar dalam perkembangan bidang-bidang ilmu pengetahuan di dunia. Saat ini banyak sekali peniliti dan profesor di seluruh dunia yang terus mengembangkan game theory agar bidang ini terus berkembang dan penerapan ke bidang lain makin luas dan pengaruhnya semakin besar.

Pemodelan kondisi yang akan terjadi akibat pengambilan keputusan oleh pihak-pihak yang terlibat dimodelkan dalam banyak bentuk, salah satunya adalah normal-form yang merupakan representasi standard dalam game theory. Game Normal-form biasanya direpresentasikan oleh matrix. Matrix ini disebut sebagai *Payoff Matrix*.

Dalam makalah ini penulis akan mengulas tentang *Payoff Matrix* yang merupakan sebuah matriks yang menggunakan prinsip-prinsip aljabar linier untuk

menyelesaikan permasalahan yang direpresntasikan oleh *Payoff Matrix*.

II. LANDASAN TEORI

A. Game Theory

Game Theory merupakan bidang yang mempelajari tentang pengambilan keputusan di antara pihak-pihak yang memiliki kepentingan yang berkonflik. Bidang Game Theory berkembang karena kontribusi JhonVon Neumann yang berkat karya ilmiah dia di tahun 1928 yang menjadi standard dasar dalam metode penyelesaian masalah di Game theory. Dari situ Game theory terus berkembang.

Kebanyakan studi kasus di Game Theory adalah kasus yang melibatkan 2 pihak. Sehingga fokus yang diteliti di sini adalah apakah ada strategy terbaik untuk satu pihak dan strategi terbaik untuk pihak lain.

Prinsip dasar dari game theory adalah sebagai berikut :

1. Setiap Pemain melakukan strategy terbaik yang bisa dilakukan
2. Setiap pemain tahu bahwa lawannya melakukan strategi terbaik juga.

Terminologi-terminologi yang digunakan di Game Theory :

1. Pemain

Pemain adalah pihak-pihak yang mengambil strategy tertentu dalam kasus Game Theory yang.

2. Strategi/Gerakan

Strategi adalah serangkaian pilihan keputusan-keputusan yang bisa diambil oleh pemain untuk mendapatkan *payoff*(keuntungan) sebesar mungkin untuk pemain tersebut. Strategi bermain ada 2 yaitu :

a. Strategi Murni

Strategi Murni adalah strategi di mana pemain mencari strategi terbaik yang bisa dipilih tanpa bisa mengetahui strategi apa yang dipilih lawan. Pemain memilih strategi terbaik yang meminimkan kerugian yang bisa dia alami dan memaksimalkan keuntungan yang bisa dia dapat.

b. Strategi Campuran

Strategi campuran adalah jika dalam

permainan pemain bisa menggunakan campuran berbagai strategi dalam variasi yang berbeda. Campuran strategi yang tepat bisa memberikan hasil yang paling optimal bagi pemain yang menggunakan acampuran strategi tersebut.

3. *Payoff*

Payoff adalah sebutan untuk keuntungan yang diperoleh pemain. Keuntungan tidak hanya bisa berbentuk uang tapi bisa bentuk lain, seperti mendapat barang/komoditas, atau mendapatkan jasa yang lebih baik

Di dalam Game theory terdapat sebuah teori dasar yaitu teorema fundamental dari game zero-sum 2-pemain. Teorema ini menyatakan bahwa :

Ada strategi p^* dan q^* di mana

$$E(p^*, q) \geq E(p^*, q^*) \geq E(p, q^*)$$

Untuk semua strategi p dan q

Dari teorema di atas kita mendapatkan definisi sebagai berikut :

Jika p^* dan q^* adalah strategi di mana

$$E(p^*, q) \geq E(p^*, q^*) \geq E(p, q^*)$$

Untuk semua strategi p dan q , maka

- p^* disebut sebagai strategi optimal untuk pemain A
- q^* disebut sebagai strategi optimal untuk pemain B
- $v = E(p^*, q^*)$ disebut sebagai nilai dari permainan.

Solusi optimal untuk p^* dan q^* bisa dicari melalui operasi dasar matriks jika kasusnya cukup simpel.

B. Aljabar Linear dan subbidang matriks

Aljabar linear adalah bidang di matematika yang berkuat di bidang-bidang vektor. Salah satu sub bidang aljabar linear adalah studi matriks dan operasi-operasi matematika di matriks.

Matriks adalah larik kotak yang terisi oleh angka-angka. Angka-angka di dalam matriks disebut sebagai entri dari matriks. Matriks terdiri atas kolom dan baris.

Matriks bisa melakukan operasi tambah, kurang, kali, dan transpose.

C. Normal Form Game

Normal form adalah game yang biasanya direpresentasikan sebagai matrix. Normal form biasanya merepresentasikan strategi-strategi yang bisa diambil oleh para pemain dan *payoff* yang akan mereka dapatkan jika memilih strategi tersebut. Normal form sering disebut juga sebagai strategical form. Normal form sering dipakai untuk mendeskripsikan game simultan di mana para pemain mengambil keputusan di saat yang sama.

D. Nash Equilibrium

Nash Equilibrium adalah konsep dasar di bidang game theory. Konsep ini menyatakan bahwa di dalam game akan ada keseimbangan yang bisa dicari bahkan di game yang terlihat sangat umum.

Nash Equilibrium dipakai luas di dalam metode penyelesaian masalah di game theory.

Nash Equilibrium menyatakan bahwa untuk sebuah pemain dia akan memilih strategy yang akan memaksimalkan keuntungan dirinya tergantung dari strategi yang dipakai oleh pihak lain. di Payoff matrix kita bisa melihat Nash Equilibrium bisa kita cari dengan mencari titik di mana Keuntungan yang diperoleh pihak baris maksimal dan untuk pihak kolom maksimal untuk kolom yang ada di baris yang dipilih oleh pemain baris.

Figure 16.11 The battle of the sexes

		Woman	
		Baseball	Ballet
Man	Baseball	(3, 2)	(1, 1)
	Ballet	(0, 0)	(2, 3)

Gambar 1 : Battle of the Sexes problem payoff matrix

(Sumber Gambar : “beginning-economic-analysis” <http://2012books.lardbucket.org/books/beginning-economic-analysis/index.html>)

Gambar 1 adalah contoh dari sebuah game yang terkenal di bidang game theory yaitu game koordinasi Battle of The Sexes.

Game ini mendeskripsikan tentang sebuah pasangan suami-istri fiktif yang sedang pulang kerja. Keduanya sebelum berangkat kerja setuju untuk pergi ke tempat untuk mencari hiburan dan waktu bersama. Karena mereka bekerja di tempat yang berbeda maka mereka memutuskan untuk pergi ke tempat hiburan dari diri masing-masing, yang artinya keputusan istri dan suami tidak terikat. Di game ini suami senang untuk pergi menonton pertandingan baseball, sedangkan istri senang untuk pergi ke tempat balet. Untuk ini jika suami pergi ke pertandingan baseball maka ia mendapat point 1 karena senang bisa menonton baseball. Sementara itu istri juga mendapat point 1 karena ia senang menonton balet. Karena mereka suami-istri yang sangat senang bersama maka jika mereka pergi mencari hiburan di tempat yang sama maka mereka masing-masing mendapat 2 point karena bisa bersama.

Bisa dilihat di payoff matrix di gambar 1 kita melihat ada 4 kombinasi pilihan karena kombinasi antara suami yang memiliki 2 pilihan dan istri yang juga memiliki 2 pilihan. Untuk 4 kombinasi ini kita bisa melihat bahwa jika suami memilih baseball dan istri memilih baseball juga maka suami mendapat 3 poin dan istri mendapat 2 point.

Sedangkan jika mereka berdua memilih untuk datang ke ballet bersama maka suami hanya mendapat 2 poin sedangkan istri mendapatkan 3 poin. Lain halnya jika mereka berdua memilih 2 hal yang berbeda. Jika suami memilih baseball dan istri memilih ballet maka suami mendapat 1 point dan istri mendapat 1 point, karena mereka tidak bersama maka mereka tidak bisa mendapatkan 2 poin yang lain. Terakhir jika suami memilih ballet dan istri memilih baseball yang terjadi adalah mereka berdua tidak ada yang mendapat poin karena mereka tidak bersama dan mereka berdua tidak berada di hal yang mereka sukai.

Di sini kita bisa melihat Nash Equilibrium yang ada. Karena poin yang didapat untuk istri dan suami tergantung dari pilihan yang mereka pilih dan pilihan pasangan mereka.

Nash Equilibrium yang ada sangat terlihat di game ini, jika suami memilih baseball maka istri pasti akan memilih untuk ikut ke baseball karena sang istri mendapat 2 poin dengan ikut bersama ke baseball. Sebaliknya jika istri memilih ballet maka suami pasti akan memilih ballet juga untuk mendapat 2 poin karena datang bersama istri.

Untuk pilihan yang di mana pasangan suami istri ini datang ke tempat yang berbeda adalah bukan Nash Equilibrium karena mereka tidak ada yang mendapat keuntungan maksimum.

E. Payoff Matrix

Payoff matrik adalah salah satu representasi dari keuntungan-keuntungan yang bisa didapat oleh pemain-pemain jika mereka-mereka memilih salah satu strategi dari pilihan-pilihan strategi yang ada.

A/B	Banyak	Sedikit
Banyak	5,5	8,3
Sedikit	3,8	10,10

Contoh tabel yang merepresentasikan sebuah payoff matriks.

Di mana baris adalah strategi yang bisa dipilih oleh pihak A, dan kolom adalah baris di pihak B.

Nilai yang ada di matriks adalah *Payoff* yang bisa didapat oleh pemain. Dimana nilai di kiri adalah *payoff* pemain A dan nilai di kanan adalah *Payoff* yang didapatkan oleh pemain B.

III. PENERAPAN PAYOFF MATRIX

Pada penerapannya Payoff Matrix bisa diterapkan dalam 2 jenis game yaitu, Game *Strictly Determined*, dan Game Strategy Campuran.

Penggunaan Payoff Matrix di game-game ini mirip tapi metode penyelesaian yang digunakan berbeda-beda.

A. Game *Strictly Determined*

Pada game *Game Strictly Determined* pemain bermain game yang pasti memiliki strategi murni yang bisa dipakai oleh pemain, tetapi metode reduksi melalui dominasi tidak bisa dipakai di sini. Untuk menemukan strategi murni yang terbaik, metode yang bisa digunakan adalah dari teorama fundamental yang sudah dideskripsikan di teori

dasar.

Contoh dari matriks game yang *Strictly Determined* adalah sebagai berikut :

Gambar 2 : Sebuah matriks Game *Strictly Determined*

(Sumber Gambar : "Game Theory")

<http://www.zweigmedia.com/pdfs/GameTheory.pdf>)

Game di atas adalah game yang dimainkan oleh A sebagai pemain baris dan B sebagai pemain kolom, 1,2,3,4 adalah strategi yang bisa dimainkan oleh A atau B.

Di gambar terlihat bahwa nilai positif menandakan nilai yang dimenangkan oleh A dan nilai negatif adalah nilai yang akan diambil dari A. Nilai ini bisa kita anggap sebagai uang, jika A menang ia akan mendapat uang, sementara itu jika ia kalah dia akan kehilangan uang.

Untuk menyelesaikan Game *Strictly Determined* kita akan menggunakan definisi sebagai berikut : Sebuah nilai a_{rs} di dalam payoff matrix A disebut sebagai titik pelana jika :

- i. a_{rs} adalah nilai terkecil di barisnya, dan
- ii. a_{rs} adalah nilai terbesar di kolomnya

sebuah game yang memiliki titik pelana dalam game *Strictly Determined*.

Karena matriks di atas adalah matriks yang memiliki titik pelana, maka kita dapat memastikan bahwa game tersebut adalah game *Strictly Determined*. Jika sebuah payoff matrix mempunyai titik pelana maka strategi maksimal yang dapat digunakan oleh pemain adalah strategi ke-r untuk pemain yang bermain sebagai pemain baris dan strategi ke-s untuk pemain yang bermain sebagai pemain kolom.

Untuk matriks di atas titik pelana ada 2 yang bernilai -1. Maka strategi terbaik untuk pemain A adalah 2 atau 4 dan strategi terbaik untuk B adalah strategi 2.

Untuk sebuah Payoff Matrix dari game *Strictly Determined* pasti memiliki satu atau lebih titik pelana, jumlah titik pelana bisa lebih dari satu, tetapi karena nilai value dari permainan pasti unik, maka nilai-nilai titik pelana pasti sama.

B. Game Strategy Campuran

Tidak selamanya game-game yang dipelajari di game theory bisa diselesaikan dengan strategi murni seperti di game yang strictly determined. Banyak kasus permainan yang memiliki sifat tidak strictly determined. Untuk menyelesaikan kasus permainan ini kita menggunakan metode lain. Yaitu metode strategi campuran, di sini kita bermain dengan mencampur beberapa strategi. Jika kita memainkan game berulang-ulang dengan payoff matriks yang sama dan payoff matrix tidak strictly determined. Kita bisa memilih di antara strategi yang cukup optimal secara acak, jadi kita mengubah strategi kita di beberapa titik permainan.

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{B} \\
 \begin{array}{cc}
 s & r \\
 p & \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \\
 s \\
 r
 \end{array} \\
 \mathbf{A}
 \end{array}$$

Gambar 3: sebuah matriks dari game yang tidak strictly determined

(Sumber Gambar : "Game Theory"

<http://www.zweigmedia.com/pdfs/GameTheory.pdf>)

Kita akan membahas cara menyelesaikan game yang memakai strategi campuran menggunakan matriks di gambar 2.

Di sini kita bisa memilih strategi campuran untuk A dengan komposisi a,b, c dan di mana a+b+c = 1 karena a,b,c merepresentasikan pecahan dari komposisi strategi A. Untuk B kita bisa memakai komposisi d dan e di mana d+e =1. Untuk merepresentasikan komposisi ini kita bisa menggunakan matriks, yang kita sebut sebagai matriks strategi campuran, untuk matriks strategi campuran milik A kita sebut sebagai matriks S, dan untuk matriks strategi campuran milik B kita sebut sebagai matriks T. Untuk *Payoff Matrik* yang ada di gambar 2 kita sebut sebagai matriks P.

Agar kita bisa menyelesaikan permasalahan ini dengan menggunakan perkalian matriks kita akan merepresentasikan matriks S sebagai matriks baris dan untuk matriks T kita menggunakan matriks Kolom. Karena S adalah matriks dari pemain A yang merupakan pemain baris di *Payoff Matrix* dan juga T adalah matriks dari pemain B yang merupakan pemain Kolom di *Payoff Matrix*. Misalkan kita membuat komposisi sebagai berikut Misalkan A memilih strategi sebagai berikut Misalkan A memilih strategi sebagai berikut Misalkan A memilih komposisi yang

direpresantasikan matriks $S = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{5}{7} \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Dan B memilih komposisi strategi yang

direpresentasikan oleh matriks T.

Untuk menghitung nilai permainan yang dihasilkan kita akan menghitung hasil perkalian matriks yang berurutan seperti SPT :

$$SPT = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{5}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Maka didapatkan SPT = 1.285713

SPT adalah nilai dari permainan.

Untuk menyelesaikan masalah strategi campuran dengan tujuan untuk meminimalkan kerugian kita bisa menggunakan teknik aljabar linear untuk matrix 2x2, jika ingin menyelesaikan matriks yang lebih besar sudah masuk ke ranah pemrograman linear yang tidak akan dibahas oleh penulis.

Untuk matriks 2x2 penulis akan membahas secara singkat.

Misalkan

$$P = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Untuk menyelesaikan ini kita menggunakan persamaan mencari strategi optimal untuk matriks game 2x2.

$$p^* = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} & \frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \\ \frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} & \frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \end{bmatrix}$$

P* adalah strategi optimal untuk pemain baris dan q* adalah strategi optimal untuk pemain kolo.

Nilai dari permainan adalah :

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{12} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

p* dan q* adalah angka diantara 0 dan 1.

Maka p*, q* dan v bisa kita hitung untuk P.

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{4 - 2}{3 + 4 + 1 - 2} = \frac{1}{3}$$

$$p_2^* = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{4 - 3}{3 + 4 + 1 - 2} = \frac{1}{6}$$

$$q_2^* = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{3 \cdot 4 - 1 \cdot 2}{3 + 4 + 1 - 2} = \frac{10}{6}$$

Jadi Strategi campuran yang bisa diambil pemain baris adalah (1/3,2/3) dan pemain kolom (1/6,5/6)

serta nilai dari permainan adalah $\frac{10}{6}$

IV. KESIMPULAN

Aplikasi komponen aljabar linear berupa matriks dalam game theory sangat luas, karena payoff matriks adalah salah satu komponen utama dalam salah satu metode

representasi sebuah game dalam game theory. Beberapa teorema dan metode penyelesaian matriks dasar bisa digunakan untuk menyelesaikan permainan di game theory.

V. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada Allah SWT, karena atas rahmat dan karunia-Nya lah makalah ini dapat selesai pada waktunya. Penulis juga ingin mengucapkan terima kasih kepada almarhum ayah saya, karena berkat beliau saya bisa kuliah. Juga terima kasih ibu saya karena beliau tidak pernah letih dalam mendukung dan mendoakan proses perkuliahan anaknya. Serta Bapak Dr. Ir. Rinaldi Munir dan Bapak Drs. Judhi Santoso Msc selaku dosen mata kuliah Aljabar Geometri. Terakhir, penulis ingin juga mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang secara langsung maupun tidak langsung telah membantu dalam merampungkan makalah ini

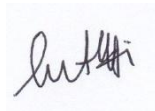
REFERENCES

- [1] Anton, Rorres, *Elementary Linear Algebra*, 10th edition, John Wiley and Sons, 2011
- [2] "Game Theory"
<http://www.zweigmedia.com/pdfs/GameTheory.pdf> Diakses Tanggal 15 Desember 2015 22:30
- [3] "beginning-economic-analysis"
<http://2012books.lardbucket.org/books/beginning-economic-analysis/index.html> Diakses tanggal 16 Desember 9:41

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 15 Desember 2015



Luthfi Kurniawan (13514102)