

Penyelesaian SPL dalam Rangkaian Listrik

Harry Octavianus Purba (13514050)
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
13514050@std.stei.itb.ac.id

Abstract— Banyak sekali aplikasi dari matriks dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu contoh penggunaan matriks adalah dalam mencari solusi sistem persamaan linier (SPL). Dalam bidang keilmuan yang mempelajari rangkaian listrik, tidak jarang digunakan matriks untuk menghitung besaran-besaran yang ada di dalamnya. Untuk mempermudah dalam mencari nilai-nilai tersebut digunakan proses operasi baris elementer (OBE) dalam matriks hasil transformasi SPL.

Keywords—Augmented, Kirchoff, Gauss Jordan.

I. PENDAHULUAN

Dalam bidang keilmuan elektro teknik, seperti teknik elektro, teknik tenaga listrik, maupun teknik telekomunikasi, rangkaian sederhana adalah dasar dari pembelajarannya. Rangkaian-rangkaian listrik yang kita jumpai selama ini menggunakan prinsip-prinsip yang ada pada hukum Kirchoff. Terdapat dua hukum Kirchoff yaitu hukum pertama Kirchoff atau KCL (arus) lalu hukum kedua Kirchoff atau KV L (tegangan). Dengan menerapkan kedua hukum tersebut akan didapatkan sebuah persamaan linear. Jika terdapat sebuah loop, maka hanya terdapat satu persamaan linear saja, namun jika ternyata terdapat banyak loop, maka persamaan linear yang dibentuk juga banyak sama seperti loop yang ada. Dengan banyaknya persamaan linear tersebut, mengakibatkan terbentuknya sistem persamaan linear(SPL).

Dalam menyelesaikan sistem persamaan linear (SPL) terdapat banyak cara, cara yang paling umum yaitu substitusi dan eliminasi. Untuk kasus SPL dua, tiga, dan empat variabel cara substitusi dan eliminasi ini mungkin masih sangat efektif dan mudah. Namun bagaimana jika terdapat sistem persamaan linear dengan 10 variabel? Cara tersebut memang bisa digunakan, namun waktu yang diperlukan untuk menyelesaikan relatif sangat lama, dan juga tingkat kesalahan yang didapatkan juga semakin besar.

Ternyata terdapat cara yang membuat waktu pengerjaan relatif lebih singkat dan solusi yang dihasilkan lebih akurat. Contohnya adalah menggunakan OBE, cara invers, metode Corner, dan lain-lain. Namun yang akan dibahas di sini adalah mengenai OBE yaitu operasi baris elementer.

II. DASAR TEORI

A. MATRIKS

Matriks merupakan kumpulan karakter-karakter yang dapat berupa huruf, angka maupun simbol-simbol, yang membentuk segiempat yang digambarkan dalam kurung siku. Dimensi matriks dilambangkan dengan huruf kapital.

Bentuk umum matriks dapat digambarkan dengan :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Huruf "A" kapital pada matriks melambangkan nama matriks. Baris pada matriks adalah serangkaian elemen dengan posisi lurus dari ujung kiri ke ujung kanan. Sedangkan kolom pada matriks adalah serangkaian elemen dengan posisi lurus dari ujung atas hingga ujung bawah. Rangkaian a_{11}, a_{12}, a_{13} merupakan baris 1 matriks. Rangkaian a_{11}, a_{21}, a_{31} merupakan kolom satu matriks. Pada matriks $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{33}$ merupakan elemen-elemen yang ada pada matriks A. Dimana untuk setiap a_{ij} melambangkan elemen matriks A pada baris ke i dan kolom ke j . Ukuran ataupun orde suatu matriks merupakan banyaknya baris matriks kali banyaknya kolom matriks.

Contoh matriks :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 9 & -13 \\ 20 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

Nama matriks adalah M, terdiri dari 2 baris dan 3 kolom, sehingga berorde 2×3 . Elemen yang menempati baris 2 kolom 1 pada matriks adalah 9.

B. JENIS MATRIKS

Terdapat berbagai jenis matriks yang disesuaikan dengan orde dan posisi elemen.

Jenis-jenis matriks tersebut adalah :

1. Matriks Bujur Sangkar

Matriks bujur sangkar adalah matriks yang memiliki banyaknya baris dan banyaknya kolom sama yaitu $n \times n$. Contoh matriks bujur sangkar adalah matriks 2×2 .

2. Matriks Diagonal

Adalah matriks bujur sangkar dimana unsur selain unsur diagonal adalah 0. Unsur diagonal adalah unsur a_{ij} dimana $i=j$.

3. Matriks Identitas

Adalah matriks diagonal yang seluruh unsur diagonalnya adalah 1.

4. Matriks Satuan

Adalah matriks yang elemen-elemennya hanya berisi angka satu atau nol.

5. Matriks Segitiga

Terdapat dua pembagian. Yaitu matriks segitiga atas yaitu matriks bujursangkar yang semua unsur di bawah unsur diagonal adalah nol. Sebaliknya matriks segitiga bawah adalah matriks bujursangkar yang semua unsur di atas unsur diagonal adalah nol.

6. Matriks Simetri

Adalah matriks bujur sangkar dimana untuk setiap elemen pada indeks baris i kolom j , mempunyai nilai yang sama dengan elemen pada indeks baris j kolom i . ($a_{ij} = a_{ji}$).

C. ISTILAH PADA MATRIKS

1. Transpos Matriks

Matriks transpos dinotasikan dengan A^t . Transpos matriks A dapat dilakukan dengan mengubah baris pada matriks A menjadi kolom pada matriks A^t

2. Determinan Matriks

Determinan matriks merupakan suatu fungsi skalar dengan domain matriks bujur sangkar. Determinan pada matriks digunakan dalam menganalisa suatu matriks seperti memeriksa ada tidak nya invers suatu matriks, menentukan solusi sistem persamaan linear, pemeriksaan basis vektor dan lain-lain. Determinan suatu matriks dilambangkan dengan mengganti kurung siku pada matriks menjadi garis vertikal ke bawah.

3. Balikan Matriks

Jika terdapat matriks bujur sangkar A dan B dan berorde sama, dan I adalah matriks identitas. Jika terdapat persamaan $A \cdot B = I$, maka dapat dikatakan bahwa B adalah invers A , dan A adalah invers dari B . Invers dinotasikan dengan pangkat negatif satu. Dalam kasus ini $A^{-1} = B$, dan $B^{-1} = A$.

4. Minor

Minor suatu elemen x pada suatu matriks adalah determinan dari suatu matriks yang didapatkan ketika baris i dihapus dari matriks, dan kolom j dihapus dari matriks, dimana i dan j adalah posisi elemen x pada matriks. Jika terdapat matriks A :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Pada matriks A maka minor elemen 2 yang terletak pada baris ke 1 kolom ke 1 diberi simbol dengan m_{11} yaitu

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

jadi minor elemen 2 (M_{11}) adalah :

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 24 = -24$$

Serupa dengan cara itu, minor elemen 3 (M_{12}) adalah :

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6$$

Dengan cara yang sama didapatkan :

$$\begin{aligned} m_{13} &= 15 \\ m_{21} &= -20 \\ m_{22} &= -5 \\ m_{23} &= 5 \\ m_{31} &= 13 \\ m_{32} &= -8 \\ m_{33} &= -10 \end{aligned}$$

5. Kofaktor

Setelah mendapatkan minor dari masing-masing elemen matriks dapat ditentukan nilai kofaktor masing-masing. Cara mencarinya adalah dengan mengalikan masing-masing nilai minor di atas dengan tanda tempat masing-masing elemen. Adapun tanda tempatnya dapat dilihat pada gambar berikut:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Dimana hal tersebut sama saja dengan mengalikan minor untuk tiap baris i dan kolom j dengan $(-1)^{i+j}$. Jadi berdasarkan tanda yang ditempatkan dapat dicari nilai kofaktor dari masing-masing elemen matriks. Untuk selanjutnya akan diberikan simbol untuk nilai kofaktor masing-masing elemen dengan C_{ij} , dimana i menandakan baris dan j menandakan kolom. jadi untuk setiap elemen di atas kita dapatkan harga kofaktornya sebagai berikut:

$$C_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = +(0 - 24) = -24$$

$$C_{12} = + \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 6) = 6$$

$$C_{13} = + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = +(16 - 1) = 15$$

$$C_{21} = - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 20) = 20$$

$$C_{22} = + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = +(0 - 5) = -5$$

$$C_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 3) = -5$$

$$C_{31} = + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = +(18 - 5) = 13$$

$$C_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -(12 - 20) = 8$$

$$C_{33} = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = +(2 - 12) = -10$$

6. Matriks Kofaktor

Setelah mendapatkan nilai kofaktor dari masing-masing elemen matriks, maka akan dapat disusun setiap nilai kofaktor tersebut sesuai dengan alamat tempatnya masing-masing. Susunan masing-masing elemen dari nilai kofaktor ini akan menghasilkan sebuah matriks baru yang kita namakan dengan matriks kofaktor. Untuk selanjutnya matriks kofaktor akan kita beri simbol dengan huruf C. Jadi matriks kofaktor (C) dari matriks di atas adalah:

$$C = \begin{bmatrix} -24 & 6 & 15 \\ 20 & -5 & -5 \\ 13 & 8 & -10 \end{bmatrix}$$

7. Adjoin Matriks

Jika kita sudah mendapatkan matriks kofaktor (C) maka sudah bisa didapatkan adjoin matriks tersebut. Adjoin matriks bujur sangkar sama nilainya dengan transpose dari matriks kofaktor, jadi dengan mencari transpose dari matriks kofaktor kita sudah mendapatkan nilai adjoin matriks. Transpose dari matriks C adalah :

$$C^T = \begin{bmatrix} -24 & 20 & 13 \\ 6 & -5 & 8 \\ 15 & -5 & -10 \end{bmatrix}$$

Maka matriks transpose dari matriks kofaktor dinamakan dengan matriks adjoin dari matriks A.

D. OPERASI PADA MATRIKS

Pada matriks juga terdapat operasi-operasi. Operasi-operasi yang dapat di lakukan pada matriks antara lain :

1. Penjumlahan Matriks

Penjumlahan matriks hanya dapat dilakukan terhadap matriks-matriks yang mempunyai ukuran (orde) yang sama. Jika $A=(a_{ij})$ dan $B=(b_{ij})$ adalah matriks-matriks berukuran sama, maka $A+B$ adalah suatu matriks $C=(c_{ij})$ dimana $(c_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij})$ atau $[A]+[B] = [C]$ mempunyai ukuran yang sama dan elemennya $(c_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij})$.

2. Pengurangan Matriks

Sama seperti pada penjumlahan matriks, pengurangan matriks hanya dapat dilakukan pada matriks-matriks yang mempunyai ukuran yang sama. Jika ukurannya berlainan maka matriks hasil tidak terdefiniskan.

3. Perkalian Skalar Matriks

Jika k adalah suatu bilangan skalar dan $A=(a_{ij})$ maka matriks $kA=(ka_{ij})$ yaitu suatu matriks kA yang diperoleh dengan mengalikan semua elemen matriks A dengan k. Mengalikan matriks dengan skalar dapat dituliskan di depan atau dibelakang matriks. Misalnya $[C]=k[A]=[A]k$ dan $(c_{ij}) = (ka_{ij})$.

4. Perkalian Matriks dengan Matriks

Apabila A adalah matriks berordo $m \times n$ dan B adalah matriks berordo $n \times p$, maka hasil perkalian matriks A dengan B, misal C, adalah matriks baru berordo $m \times p$. Misalkan matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Maka

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

5. Perpangkatan Matriks Bujur Sangkar

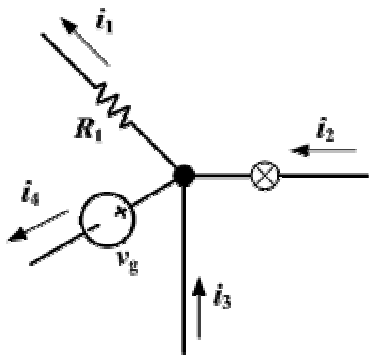
Apabila A adalah sebuah matriks persegi, maka pemangkatan matriks A didefinisikan sebagai berikut. Apabila A adalah sebuah matriks persegi, maka pemangkatan matriks A didefinisikan sebagai berikut. $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A^2$, $A^4 = A \cdot A^3$,

E. HUKUM MATRIKS

Apabila A , B , dan C adalah matriks-matriks yang sepadan untuk dikalikan, maka berlaku sifat-sifat perkalian matriks, yaitu:

- Tidak bersifat komutatif, $A \cdot B \neq B \cdot A$
- Bersifat asosiatif, $(A \cdot B)C = A(B \cdot C)$
- Bersifat distributif, $A(B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- Ada matriks identitas I sehingga $AI = IA = A$
- Jika $A \cdot B = O$, maka belum tentu $A = O$ atau $B = O$
- Jika $A \cdot B = A \cdot C$, maka belum tentu $B = C$
- $(A \cdot B)' = B' \cdot A'$

F. HUKUM PERTAMA KIRCHHOFF



Arus yang memasuki titik percabangan sama besar dengan arus yang meninggalkan titik tersebut. $i_1 + i_4 = i_2 + i_3$

Hukum ini disebut **Hukum I Kirchhoff, Hukum titik Kirchhoff, Hukum percabangan Kirchhoff**, atau KCL (Kirchhoff's Current Law). Prinsip dari kekekalan muatan listrik mengatakan bahwa: Pada setiap titik percabangan dalam sirkuit listrik, jumlah dari arus yang masuk kedalam titik itu sama dengan jumlah arus yang keluar dari titik tersebut. Atau Jumlah total arus pada sebuah titik adalah nol. Mengingat bahwa arus adalah besaran bertanda (positif atau negatif) yang menunjukkan arah arus tersebut menuju atau keluar dari titik, maka prinsip ini bisa dirumuskan menjadi :

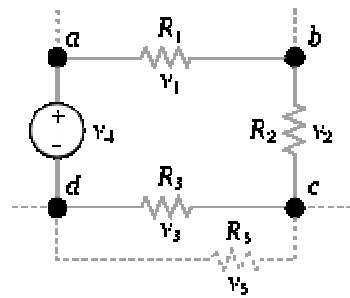
$$\sum_{k=1}^n I_k = 0$$

n adalah jumlah cabang dengan arus yang masuk atau keluar terhadap titik tersebut. Persamaan ini juga bisa digunakan untuk arus kompleks:

$$\sum_{k=1}^n \tilde{I}_k = 0$$

Hukum ini berdasar pada kekekalan muatan, dengan muatan (dalam satuan coulomb) adalah hasil kali dari arus (ampere) dan waktu (detik).

G. HUKUM KEDUA KIRCHHOFF



Jumlah dari semua tegangan di sekitar loop (putaran) sama dengan nol. $v_1 + v_2 + v_3 - v_4 = 0$

Hukum ini disebut sebagai **Hukum kedua kirchhoff, Hukum loop (putaran) Kirchhoff**, dan **KVL (Kirchhoff's Voltage Law)**.

Prinsip kekekalan energi mengatakan bahwa Jumlah terarah (melihat orientasi tanda positif dan negatif) dari beda potensial listrik (tegangan) di sekitar sirkuit tertutup sama dengan nol. Atau secara lebih sederhana, jumlah dari emf dalam lingkaran tertutup ekuivalen dengan jumlah turunnya potensial pada lingkaran itu.

Atau Jumlah hasil kali resistansi konduktor dan arus pada konduktor dalam lingkaran tertutup sama dengan total emf yang ada dalam lingkaran (loop) itu.

Mirip dengan hukum pertama Kirchhoff, dapat ditulis sebagai:

$$\sum_{k=1}^n V_k = 0$$

Disini, n adalah jumlah tegangan listrik yang diukur.

Tegangan listrik ini juga bisa berbentuk kompleks:

$$\sum_{k=1}^n \tilde{V}_k = 0$$

Hukum ini berdasarkan kekekalan "energi yang diserap atau dikeluarkan medan potensial" (tidak termasuk energi yang hilang karena disipasi). Diberikan sebuah tegangan listrik, suatu muatan tidak mendapat atau kehilangan energi setelah berputar dalam satu lingkaran sirkuit karena telah kembali ke potensial awal.

H. OPERASI BARIS ELEMENTER (OBE)

Operasi baris elementer (OBE) adalah operasi yang dilakukan dalam rangka penyederhanaan suatu matriks augmented. OBE dalam prosesnya merupakan operasi aritmatika (melibatkan penjumlahan dan perkalian) yang dikenakan pada setiap unsur dalam suatu baris tertentu dari sebuah matriks.

Dalam prosesnya operasi baris elementer meliputi :

1. Pertukaran baris
2. Perkalian suatu baris dengan konstanta bukan nol
3. Penjumlahan suatu baris dengan hasil perkalian baris lain dengan konstanta bukan nol.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dalam matriks B, terdapat beberapa istilah yang perlu diketahui :

1. Bilangan 1 (pada baris pertama kolom pertama) dinamakan satu utama
2. Bilangan 2 pada baris ke dua dinamakan unsur pertama tak nol pada baris ke dua
3. Baris terakhir dinamakan baris nol, karena setiap unsur berisikan nol.
4. Baris pertama dan kedua dinamakan baris tak nol, karena terdapat unsur pada baris yang bukan merupakan nol.

Jika matriks augmented di reduksi, akan menghasilkan matriks eselon, dan jika direduksi lagi akan menghasilkan matriks eselon tereduksi.

Tujuan dilakukannya OBE pada matriks adalah menghasilkan matriks eselon yang memiliki sifat :

1. Pada baris tidak nol, unsur pertama tak nol adalah 1 (membuat satu utama)
2. Pada baris berturut-turut, baris yang berada di bawah membuat 1 utama lebih ke kanan (tidak boleh sejajar)
3. Jika ada ada baris nol, maka diletakkan pada ujung bawah
4. Pada kolom yang memuat unsur 1 utama, maka unsur lainnya adalah nol

Dikatakan matriks eselon jika memiliki sifat 1, 2, dan 3 (proses eliminasi Gauss). Sementara jika keamatnya terpenuhi maka dinamakan matriks eselon tereduksi (proses eliminasi Gauss-Jordan).

Contoh penggunaan OBE untuk menghasilkan matriks eselon dan matriks eselon tereduksi :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad b_2 \leftrightarrow b_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$-2b_2 + b_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad -b_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Sehingga didapatkan matriks eselon :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Dengan mereduksi kembali :

$$-b_3 + b_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad b_2 + b_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

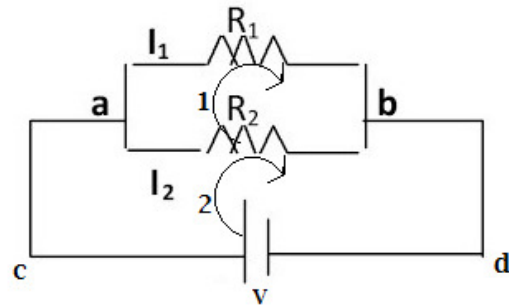
Sehingga didapatkan matriks eselon tereduksi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Sehingga dari matriks eselon tereduksi, didapatkan solusi dari persamaan linear adalah $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ dan $x_3 = 3$.

III PENGGUNAAN MATRIKS DALAM PENYELESAIAN RANGKAIAN LISTRIK

Misalkan terdapat suatu rangkaian.



Pada rangkaian tersebut, sesuai dengan hukum pertama Kirchoff KCL dan hukum kedua Kirchoff KVL, untuk loop 1 didapatkan :

$$I_1 R_1 + I_1 R_2 - I_2 R_2 = 0$$

Yang ekuivalen dengan

$$I_1 (R_1 + R_2) - I_2 R_2 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

Untuk loop 2 didapatkan :

$$-V + I_2 R_2 - I_1 R_2 = 0$$

Yang ekuivalen dengan

$$-I_1 R_2 + I_2 R_2 = V \dots \dots \dots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2), dapat ditransformasikan ke dalam matriks $AX = B$, yaitu

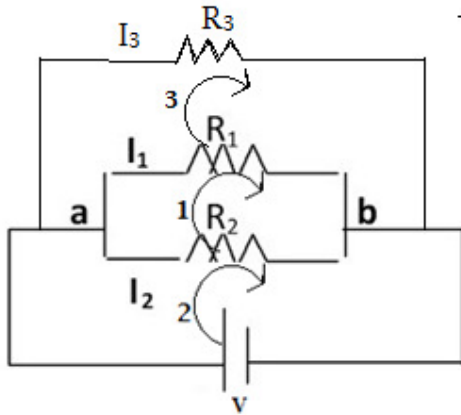
$$\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V \end{bmatrix}$$

Dari persamaan matriks tersebut didapatkan matriks augmented

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 & V \end{bmatrix}$$

IV. CONTOH PERSOALAN

Kasus Pertama



Pada rangkaian, jika diketahui R_3 adalah 4 ohm, R_1 adalah 4 ohm, dan R_2 adalah 2 ohm, dan V adalah 10 volt. Tentukan I_1 , I_2 , dan I_3 !

Penyelesaian :

Pada rangkaian sesuai dengan hukum pertama dan kedua Kirchoff didapatkan

- Loop 1
 $R_1 I_1 - R_1 I_3 + R_2 I_1 - R_2 I_2 = 0$
 Ekuivalen dengan :
 $(R_1 + R_2) I_1 - R_2 I_2 - R_1 I_3 = 0$
 $6 I_1 - 2 I_2 - 4 I_3 = 0 \dots \dots \dots (1)$
- Loop 2
 $-V + R_2 I_2 - R_2 I_1 = 0$
 Ekuivalen dengan
 $R_2 I_2 - R_2 I_1 = V$
 $2 I_2 - 2 I_1 = 10 \dots \dots \dots (2)$
- Loop 3
 $R_3 I_3 + R_1 I_3 - R_1 I_1 = 0$
 Ekuivalen dengan
 $-R_1 I_1 + (R_1 + R_3) I_3 = 0$
 $-4 I_1 + 8 I_3 = 0 \dots \dots \dots (3)$

Dari persamaan yang dihasilkan dapat ditransformasikan ke dalam matriks $AX = B$, yaitu

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan matriks tersebut didapatkan matriks augmented

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 10 \\ -4 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan OBE :

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,333 & -0,667 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 10 \\ -4 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,333 & -0,667 & 0 \\ 0 & 1,333 & -1,333 & 10 \\ 0 & -1,333 & 5,333 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,333 & -0,667 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7,5 \\ 0 & 0 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan hasil eliminasi Gauss :

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,333 & -0,667 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7,5 \\ 0 & 0 & 1 & 2,5 \end{bmatrix}$$

Dengan melanjutkan OBE :

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,333 & 0 & 1,667 \\ 0 & 1 & -1 & 7,5 \\ 0 & 0 & 1 & 2,5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,333 & 0 & 1,667 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2,5 \end{bmatrix}$$

Didapatkan hasil eliminasi Gauss Jordan :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2,5 \end{bmatrix}$$

Sehingga dari hasil akhir tersebut didapatkan , $I_1 = 5 \text{ A}$,
 $I_2 = 10 \text{ A}$, dan $I_3 = 2,5$

Kasus Kedua :

Setelah menggunakan hukum pertama dan hukum kedua Kirchoff ke dalam suatu rangkaian seri dan paralel , didapatkan beberapa sistem persamaan linear (SPL) sebagai berikut

$$\begin{aligned} 2I_1 + 3I_2 + 6I_3 + 7I_4 - 5I_5 &= 12 \\ 3I_1 + 2I_2 - 2I_3 + 10I_4 + 2I_5 &= 15 \\ 4I_1 + I_2 - I_3 + 2I_4 - 7I_5 &= 20 \\ -I_1 - 3I_2 - 2I_3 + 9I_4 + 3I_5 &= 18 \\ -2I_1 + 3I_2 - 4I_3 + 5I_4 - 6I_5 &= 9 \end{aligned}$$

Tentukan besar kuat arus I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 jika diketahui satuan untuk rangkaian adalah ampere, ohm , dan volt!

Penyelesaian :

Dari sistem persamaan linear yang diberikan , dapat ditransformasikan menjadi suatu matriks augmented :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 7 & -5 & 12 \\ 3 & 2 & -2 & 10 & 2 & 15 \\ 4 & 1 & -1 & 2 & -7 & 20 \\ -1 & -3 & -2 & 9 & 3 & 18 \\ -2 & 3 & -4 & 5 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi dengan menggunakan OBE akan didapatkan matriks eselon hasil eliminasi Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.25 & -0.25 & 0.5 & 0 & 2.135 \\ 0 & 1 & -1.286 & 1.714 & 0 & 0.984 \\ 0 & 0 & 1 & 0.176 & 0.544 & -1.191 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.201 & 2.037 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1.637 \end{bmatrix}$$

Setelah direduksi lagi, didapatkan matriks eselon terseduksi hasil eliminasi Gauss Jordan :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.81 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2.717 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.602 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1.708 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1.637 \end{bmatrix}$$

Sehingga dari matriks eselon tereduksi tersebut didapatkan solusi SPL dimana

$$\begin{aligned} I_1 &= 1,81 \text{ A} \\ I_2 &= -2,717 \text{ A} \\ I_3 &= -0,602 \text{ A} \\ I_4 &= 1,708 \\ I_5 &= -1,637 \end{aligned}$$

V. SIMPULAN

Dengan OBE (Operasi Baris Elementer), menemukan solusi sebuah SPL (Sistem Persamaan Linear) menjadi lebih mudah, lebih akurat , dan menggunakan waktu yang relatif lebih singkat jika dibandingkan dengan menggunakan substitusi dan eliminasi. Contoh kasus yang menggunakan matriks dalam penyelesaian SPL adalah rangkaian listrik.

VI. UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Tuhan Yang Maha Esa , oleh karena berkat-Nya lah makalah “ Aljabar Geometri “ ini dapat terselesaikan. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Bapak Rinaldi Munir dan Judhi Santoso selaku dosen pembimbing mata kuliah “ Aljabar Geometri “, yang telah memberikan berbagai pegetahuan,khususnya dalam hal matriks dan penggunaannya. Terimakasih juga kepada teman-teman yang juga turut membantu dan mendukung dalam pembuatan makalah ini .

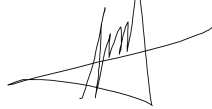
DAFTAR PUSTAKA

<http://www.uniksharianja.com/2015/03/minor-kofaktor-matrik-kofaktor-dan.html> diakses 15 Desember 2015
[https://id.wikipedia.org/wiki/Matriks_\(matematika\)](https://id.wikipedia.org/wiki/Matriks_(matematika)) diakses 15 Desember 2015
https://id.wikipedia.org/wiki/Hukum_sirkuit_Kirchhoff diakses 15 Desember 2015
http://www.idomaths.com/gauss_jordan.php diakses 15 Desember 2015
Lerner, David. 2007. Lecture notes on linear algebra. Kansas : Departement of Mathematics.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 15 Desember 2015



Harry Purba (13514050)