Pemakaian Bilangan Kompleks pada Potential Flow Dua Dimensi

Faza Thirafi - 13514033
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
13514033@std.stei.itb.ac.id

***Abstrak*— Bilangan kompleks adalah salah satu pokok bahasan yang dipelajari pada cabang Aljabar Geometri, khususnya di bagian pembahasan aljabar kompleks. Bilangan kompleks adalah bilangan yang memunculkan atau merepresentasikan hal yang tidak dapat dicapai dari bilangan biasa, atau bias dibilang menyelesaikan masalah yang tidak bisa dilakukan dengan bilangan riil. Dari pemikiran tersebut, maka pemakaian bilangan kompleks dapat ditemukan dimana-mana. Mulai dari matematika sendiri untuk pencarian akar-akar tidak riil dari sebuah persamaan, lalu pada rangkaian arus bolak-balik, pada dinamika fluida, analisis sinyal, bahkan pada *Computer Science*. Hal tersebut memperlihatkan bahwa bilangan kompleks merupakan komponen yang sangat penting dalam pengembangan ilmu-ilmu masa kini.**

Pada makalah ini, akan diperlihatkan bahwa bilangan kompleks juga dapat digunakan pada bahasan *Potential Flow* yang termasuk dalam kelompok besar Dinamika Fluida. Teori *potential flow* membahas tentang aliran yang melewati bidang tertentu. Nantinya, dipakai sebagai teori pada sayap pesawat terbang.

***Kata kunci*—bilangan kompleks, *Potential Flow*, dua dimensi, fluida.**

I. PENDAHULUAN

Fisika adalah sebuah disiplin ilmu yang sudah digunakan sejak ratusan, bahkan ribuan tahun yang lalu. Disiplin ilmu ini memang merupakan salah satu akar ilmu dari banyak ilmu lain. Di mulai dari fisika, akan muncul teori gravitasi, teori elektrika, teori mekanika, dinamika, dan banyak teori-teori lainnya. Salah satu cabang ilmu fisika yang akan dibahas di sini adalah tentang Dinamika Fluida.

Berkaitan dengan dinamika fluida, pada zaman sekarang, manusia bisa melakukan perjalanan jarak jauh yang bisa ditempuh dalam hitungan jam. Alat transportasi yang umum digunakan dalam melakukan perjalanan tersebut adalah pesawat. Sampai saat ini, pesawat sudah banyak dikembangkan sejak ditemukan pertama kali oleh *Wright Brothers* pada awal abad ke-20. Karena kebutuhan manusia akan hal ini, banyak peneliti yang menemukan teori-teori baru tentang pergerakan pesawat, bahan yang paling optimal untuk digunakan pada badan pesawat, juga teori tentang aliran udara di antara sayap pesawat.

Gambar 1 Aliran angin pada *Airfoil*
(http://www.web.mit.edu/)

Dinamika fluida erat kaitannya dengan pergerakan pesawat, karena pesawat sendiri memang dalam geraknya memanfaatkan fluida yang berada di sekitarnya, yaitu udara. Di dalam pembahasan dinamika fluida sendri dikenal dengan sebuah percabangan lagi yang bernama *potential flow*. Sesuai namanya, *potential flow* pada hal ini berurusan dengan aliran udara yang melewati sayap pada suatu ketinggian (potensial). Maksudnya, bagaimana pesawat dapat memanfaatkan aliran udara pada sayap ini untuk bisa terbang dan beradaptasi dengan udara sekitar.

Berkaitan dengan hal tersebut, pada salah satu teori dalam *potential flow* ilmuwan memanfaatkan bilangan kompleks untuk merepresentasikan bagian imajiner dari rumusan pada bidang *x-y* (dua dimensi). Lebih detilnya, bilangan kompleks ini digunakan pada penyelesaian Persamaan Laplace dan akan mengarahkan perhitungan kepada kondisi Cauchy-Riemann pada bidang kompleks. Untuk itu, bilangan kompleks digunakan. Kita akan melihat bagaimana alurnya sehingga bilangan kompleks ini dapat dimanfaatkan pada *Potential Flow.*

II. DASAR TEORI

1. Bilangan Kompleks

Complex number atau bilangan kompleks adalah salah satu kelompok bilangan yang tidak termasuk himpunan bilangan riil. Bilangan kompleks ini digunakan biasanya dalam mempresentasikan sebuah bentuk yang sering ditemukan pada perhitungan matematika, yaitu √(-1). Maka seorang ilmuwan matematika tersohor bernama Leonhard Euler memperkenalkan sebuah notasi untuk menuliskan bentuk tersebut, yaitu huruf '*i*'.

Pada dasarnya, bilangan kompleks memiliki dua komponen dalam penulisannya. yaitu

$$z = a + bi$$

atau

$$z = a + ib$$

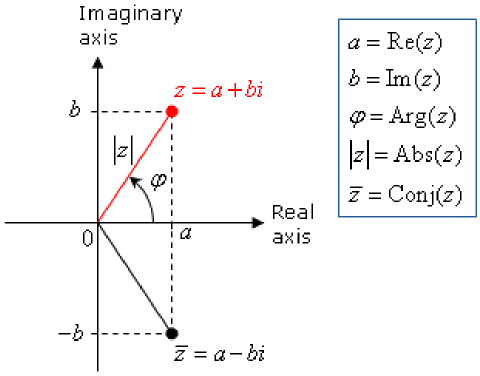
dimana

a adalah bagian riil,

b adalah bagian imajiner, dan

i adalah $\sqrt{-1}$

Untuk menggambarkan bilangan kompleks, maka digunakan lah sebuah koordinat kartesian 2 dimensi yang sumbu-sumbunya terdiri atas sumbu riil dan sumbu imajiner. Biasanya, koordinat itu disebut bidang kompleks atau *complex plane*.



Gambar 2 *Complex plane*
(http://www.speqmath.com/)

Berkaitan dengan bilangan imajinernya, disepakati bentuk atau pola sebagai berikut:

$$i^0 = 1;\ i^1 = i;\ i^2 = -1;\ i^3 = -i;\ i^4 = 1;\ i^5 = i;\ \text{dst.}$$

2. Operasi Bilangan Kompleks

Layaknya bilangan riil, bilangan kompleks dapat dioperasikan seperti operasi tambah, kurang, kali, dan bagi. Namun, terdapat beberapa perbedaan dengan operasi bilangan riil biasa.

a. Penjumlahan *(Addition)*
Penjumlahan pada bilangan kompleks harus dibedakan pada bagian riil dan imajiner. Bagian riil dijumlahkan dengan bagian riil. Bagian imajiner dijumlahkan dengan bagian imajiner. Begitu juga pada pengurangan (*substraction*).
Secara umum:
$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

b. Perkalian *(Multiplication)*
Pada bilangan kompleks, perkalian dua bilangan dilakukan dengan perkalian aljabar biasa antara 2 suku bilangan. Namun harus diperhatikan, bahwa nilai i^2 adalah (-1).
Secara umum:
$$(a + bi)(c + di) = ac + (ad + bc)i - bd$$

c. Pembagian *(Division)*
Seperti pembagian pada aljabar, dari penyebut kita akan mengalikan sebuah pecahan lain yang merupakan 'sekawan' dari penyebut.
Secara umum:
$$\frac{(a+bi)}{(c+di)} = \frac{(a+bi)}{(c+di)} x \frac{(c-di)}{(c-di)} = \frac{(ac+bd)}{(c^2+d^2)} + \frac{(bc-ad)}{(c^2+d^2)} i$$

Selanjutnya, bilangan kompleks memiliki beberapa sifat-sifat pengoperasian. Yaitu:

i) Klosur (*Closure*)
Klosur berarti saat 2 buah bilangan dengan jenis yang sama dioperasikan, akan menghasilkan bilangan jenis itu sendiri. Klosur pada bilangan kompleks terdiri dari penjumlahan dan perkalian. Karena saat dua bilangan kompleks dikali atau dijumlah, akan menghasilkan bilangan kompleks

kembali.

ii) Identitas
Bilangan kompleks memiliki 2 buah bilangan identitas layaknya bilangan real. Yaitu saat penjumlahan, bilangan identitasnya 0. Lalu, saat perkalian bilangan identitasnya 1.

iii) Invers
Dalam penjumlahan, sebuah bilangan kompleks *z* memiliki invers (-*z*) sehingga hasil penjumlahannya 0. Lalu dalam perkaliannya, *z* memiliki invers (1/*z*) sehingga hasil perkaliannya 1.

iv) Komutatif, asosiatif, dan distributif
Pada operasi bilangan kompleks, sifat komutatif berlaku pada perkalian dan penjumlahan. Juga sifat komutatif berlaku pada perkalian dan penjumlahan. Serta sifat distributive berlaku juga untuk bilangan kompleks.

3. *Fluid Dynamics* dan *Potential Flow*

a. *Fluid Dynamics*

Fluid Dynamics atau dinamika fluida adalah salah satu subcabang ilmu fisika yang bersumber dari mekanika fluida. Intinya, dinamika fluida ini memperalajari tentang sebuah fluida yang bergerak. Fluida disini dapat dalam bentuk cairan maupun gas. Pembahasan dinamika fluida berkisar dari kecepatan, tekanan, gaya-gaya, dan sebagainya.

Pada persoalan dinamika fluida, banyak persamaan dan teorema yang diacu ataupun dihasilkan. Beberapa aksioma yang dipakai dalam dinamika fluida yaitu hukum ke-2 Newton, hukum kekekalan massa, hukum kekekalan momentum linier, hingga hukum kekekalan energi.

b. *Potential Flow*

Dalam bahasan dinamika fluida, *potential flow* merupakan sebuah bagian yang terdiri dari persamaan-persamaan matematika dan lebih membahas tentang kecepatan aliran udara yang bergerak melewati sebuah benda yang bergerak, maupun diam.

III. PEMBAHASAN

Potential Flow (ϕ) dapat diartikan sebagai aliran kecepatan fluida yang tidak berotasi (*irrotational flow*). Aliran ini pada saat melewati benda tidak mengalami gesekan dengan permukaan benda tersebut (*frictionless*). Jadi aliran tersebut hanya ‘terhambat’ oleh benda yang dilewatinya, tanpa membuat gerakan mengelilingi benda tersebut dan tanpa gesekan. Hal ini mengakibatkan vortisitasnya (besar kecepatan berotasi) tidak ada.

$$\text{vortisitas} = \omega = \nabla \times v = 0$$

Selanjutnya, karena $\nabla \times v = 0$, menurut analisis vektor pada kalkulus, didapat bahwa jika garis-garis kecepatan (medan kecepatam) tak berotasi, maka dapat diekspresikan berupa gradien pada potensial skalar (Φ).

$$v = -\nabla.\Phi$$

dengan Φ adalah kecepatan potensial dan ∇ adalah operasi turunan nya.

Dalam koordinat kartesian, *potential flow* dapat ditampilkan dalam bentuk turunan parsial menjadi

$$v_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \qquad v_2 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \qquad v_3 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}$$

Persamaan di atas diimplementasikan dalam koordinat *x-y-z*. Artinya, akan direpresentasikan dalam bentuk dimensi tiga. Selanjutnya, kita membatasi untuk dimensi dua saja. Karena pada dimensi dua lah bilangan kompleks digunakan.

Two-dimensional potential flow merupakan *potential flow* yang dapat direpresentasikan dalam sebuah bidang dua dimensi. Pada dasarnya, pada dimensi 2 *potential flow* ini dapat memakai persamaan laplace, dengan bentuk dasar turunan orde 2

$$\nabla^2 \Phi = 0.$$

Karena kita akan memakai persamaan pada dimensi dua, maka dapat diambil persamaan

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

Ada beberapa cara untuk menghasilkan solusi dari persamaan Laplace tersebut agar didapat persamaan yang sederhana dengan koefisien yang konstan karena merupakan persamaan turunan orde dua. Dapat dengan memisahkan variabal, atau menggunakan variabel dengan bilangan kompleks.

Dalam hal ini, penggunaan bilangan kompleks akan lebih berguna untuk menyelesaikan persamaan Laplace. Dari teori pada bilangan kompleks, fungsi yang mengandung parameter bilangan kompleks $z=x+iy$ dapat dianalisis satu per satu. Bentuk persamaan Laplace ini adalah sebuah turunan berorde 2. Maka turunan yang mengacu pada *z* akan sama untuk berbagai arah aliran. Hingga nantinya penghitungan secara kompleks ini akan mengarah kepada persamaan Cauchy-Riemann pada sebuah bidang kompleks.

Dari persamaan *potential flow*, kita anggap sebuah kecepatan potensial bernama **'a'** yang memiliki dua komponen, yaitu *u* dan *v* yang memenuhi persamaan berikut.

a = (u,v)

Misalkan ada 2 bilangan kompleks z dan w dengan x, y, φ, dan ψ adalah bilangan riil, yaitu

$$z = x + iy \text{ dan } w = \varphi + i\psi$$

yang memenuhi persamaan f(z) = w, dimana f adalah fungsi yang memetakan secara analitik domain (x,y) ke kodomain (φ,ψ) dan w merupakan potensial kompleks. Karena w adalah hasil fungsi dari z, dan z terdiri atas x dan y, maka fungsi f dapat ditulis sebagai

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \quad \ldots.\ (1)$$

Lalu kita ambil persamaan Cauchy-Riemann dalam kasus ini dan kita terapkan pada **a**:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad \ldots..\ (2)$$

$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad \ldots.\ (3)$$

kemudian, kita turunkan persamaan f(z) = w dalam z pada persamaan (1) sehingga didapat hasil

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = -i\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad \ldots.\ (4)$$

Dari hasil turunan f di atas, terlihat bahwa f '(z) independen dengan arah dari hasil turunannya. Dan kita dapat langsung dapat mengambil kesimpulan dengan menyubstitusikan persamaan (2) dan (3) kepada hasil turunan pada persamaan (4). Yaitu

$$\frac{df}{dz} = u - iv$$

Dalam bentuk lain, dengan beberapa langkah perhitungan secara aljabar kita dapat membuat hasil penurunan fungsi tersebut menjadi

$$\frac{df}{dz} = qe^{-i\theta}$$

$$q = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}$$

dengan q adalah kecepatan dari aliran dan θ adalah sudut antara *flow* dan sumbu-x pada koordinat kartesian.

Dengan persamaan tersebut, kita dapat lebih mudah menghitung hal-hal yang berhubungan dengan *potential flow*. Seperti yang sudah diungkapkan sebelumnya, persamaan ini banyak digunakan pada aliran fluida. di antaranya:

a. *Straining flow*

Straining flow ini merupakan aliran dengan besar komponen ψ = 2kxy, k adalah konstanta. Lalu komponen kecepatan *u* dan *v* adalah

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 2kx = \frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -2ky = \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

Lalu didapat

$$\phi = k(x^2 - y^2)$$

sehingga, ari persamaan dasarnya kita dapat rumus umum

$$f(z) = \phi + i\psi = k(x^2 - y^2) + i2kxy = kz^2$$

b. Pusaran garis

pusaran garis-garis atau *line vortex* merupakan kumpulan aliran (medan aliran) **u** dengan

$$\mathbf{u} = \frac{\Gamma}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\theta}},$$

jika Γ adalah *vorticity strength*, yang komponen potensialnya sama dengan medan aliran **u,**

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta,$$

Dengan begitu secara langsung dapat ditentukan bahwa *complex potential* adalah

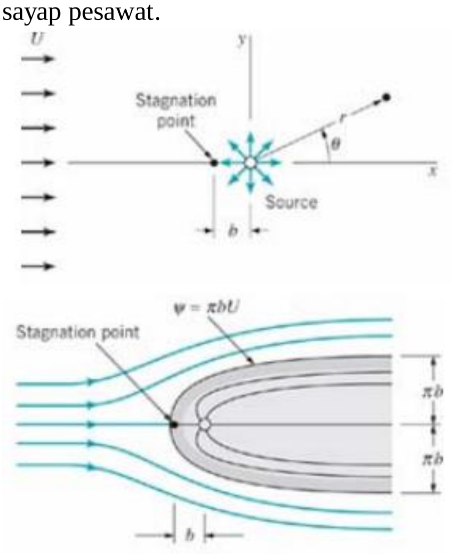
$$f(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi r}\log z$$

serta komponen imajiner dari persamaan ini dapat ditentukan yaitu

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

c. Aliran angin pada sayap pesawat

Disini kita menganggap bahwa *source* atau aliran angin asal membentuk *Uniform Stream*, yakni arah semua garis-garis alirannya sama atatu sejajar. Maka disini kita akan mendapat persamaan yang dipakai dalam penentuan aliran udara yang melewati sayap pesawat.



Gambar 3 Ilustrasi aliran angin (http://user.engineering.uiowa.edu/)

Bagian imajiner (*stream* function) dari persamaan f(z) disini yaitu

$$\phi = Ur\cos\theta + \frac{m}{2\pi}\ln r$$

dan bagian riil nya (*velocity potential*) adalah

$$\psi = Ur\sin\theta + \frac{m}{2\pi}\theta$$

dengan m adalah massa.

IV. KESIMPULAN

Makalah ini membahas tentang salah satu pemakaian bilangan kompleks pada satu konsep tentang fluida, yaitu *potential flow* pada bahasan Dinamika Fluida. *Potential flow* ini juga sering dimanfaatkan seperti pada aliran antara sayap pesawat selama masa terbangnya, lalu aliran diantara tabung, pada pertemuan dua pusaran, dan sebagainya.

Dapat dilihat bahwa bilangan kompleks, yang mengandung bilangan imajiner saja memiliki manfaat yang begitu luas, salah satunya sepeeti yang diungkapkan dalam makalah ini. Mungkin pada zaman dahulu bilangan imajiner ini tidak terlalu dipandang layaknya bilangan riil yang bentuknya saja sudah sangat jelas terlihat. Ini manfaatnya jika kita dapat berpikir kreatif dan inovatif.

V. UCAPAN TERIMA KASIH

Dengan terselesaikannya makalah ini, saya mengucapkan terima kasih kepada banyak pihak. Yang pertama dan utama kepada Allah SWT yang telah mencurahkan ilmu-Nya dan atas kehendak-Nya makalah ini dapat selesai. Lalu kepada orang tua dan keluarga saya yang selalu mendukung studi saya di Teknik Informatika ini. Lalu kepada dosen-dosen saya yang saya banggakan, Bapak Rinaldi Munir dan Bapak Judhi Santoso yang telah membimbing studi Aljabar Geometri pada semester ini dengan penuh dedikasi. Kemudian, kepada teman-teman seperjuangan, Teknik Informatika ITB 2014 yang mendukung dan menyemangati penulis dalam penyelesaian makalah ini.

Terakhir, penulis mengucapkan terima kasih kepada seluruh pembaca makalah ini, dari mana pun asalnya. Mohon maaf atas segala kekurangan yang terdapat dari makalah ini, karena penulis tidak luput dari kesalahan. Terima kasih.

REFERENSI

[1] Vince, John, "Geometric Algebra for Computer Graphics" London: Springer-Verlag, 2008, pp. 11–16.

[2] Anonymous, "Two Dimensional Flow" from: http://www.maths.bris.ac.uk/~majge/week8.pdf, diakses tanggal 15 Desember 2015, pukul 15.33

[3] Anonymous, "Complex Numbers" from: http://www.speqmath.com/usersguide/complexnumbers.html, diakses tanggal 15 Desember 2015, pukul 13.56

[4] Desphande, M. D., "Two Dimensional Potential Flow", from: http://164.100.133.129:81/eCONTENT/Uploads/ACD2505-04-%20Potential%20Flow-2D.pdf, diakses tanggal 15 Desember 2015, pukul 16.36

[5] Levicky, R., "Potential Flow", from: http://faculty.poly.edu/~rlevicky/Handout14_6333.pdf, diakses tanggal 15 Desember 2015, pukul 17.23

[6] Stern, Fred, "Differential Analysis for Fluid Flow" from: http://user.engineering.uiowa.edu/~fluids/posting/Lecture_Notes/Chapter6_Potential_Flow.pdf, diakses tanggal 16 Desember 2015, pukul 06.34

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 15 Desember 2015

Faza Thirafi / 13514033