Aplikasi Aljabar Geometri dalam Menentukan Volume *Parallelepiped* Beserta Penurunan ke Rumus Umum dengan Memanfaatkan Sifat Aljabar Vektor

Ade Yusuf Rahardian / 13514079[1]

Program Studi Teknik Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

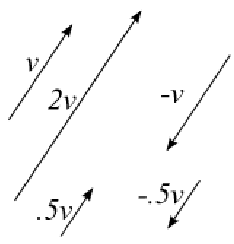
[1]*13514079@std.stei.itb.ac.id*

Abstrak—Parallelepiped **adalah prisma yang bidang alasnya berbentuk jajar genjang. *Parallelepiped* siku-siku merupakan bangun ruang balok yang selama ini kita kenal. Makalah ini menjelaskan bagaimana rumus volume *parallelepiped* diperoleh dari hasil kali luar tiga buah vektor dan bagaimana menurunkan rumus yang diperoleh dari hasil kali luar tersebut ke bentuk rumus yang lebih umum dengan memanfaatkan sifat aljabar vektor.**

***Kata Kunci*—Aljabar Geometri, *Parallelepiped*, Rumus Volume, Vektor**

I. PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehari-hari, kita biasa mengukur sesuatu dari satuan panjangnya, sehingga kita bisa memperoleh besaran panjang, luas, hingga besaran volume. Kita dapat dengan mudah mengukur tinggi gedung 18 meter, luas gedung 100 m^2, sehingga volumenya dapat kita peroleh 1800 m^3. Di dalam kehidupan nyata, tidak mudah untuk membayangkan sesuatu yang memiliki panjang, luas, atau volume yang bernilai negatif. Namun, di matematika, tepatnya pada bidang aljabar geometri, hal ini merupakan sesuatu yang mungkin.



Gambar 1. Vektor[3]

Secara garis besar, aljabar geometri memanipulasi vektor. Satu vektor memiliki arah dan besar. Arah sebuah vektor ditentukan dari tanda komponen, sedangkan besar vektor ditentukan dari panjangnya. Apabila arah sebuah vektor dibalik, maka tandanya juga ikut dibalik

Gambar 2. Luas Jajar Genjang[1]

Hasil perkalian dua vektor dapat digunakan untuk merepresentasikan volume sebuah jajar genjang seperti ditunjukkan pada Gbr. 2, yang luasnya dapat dinyatakan sebagai berikut.

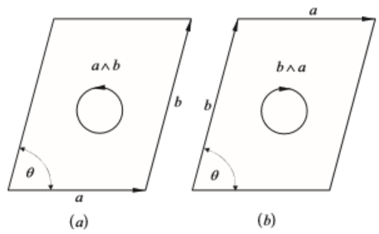
$$|a||b|\sin\theta \tag{1}$$

Karena |**a**| dan |**b**| merupakan skalar dan sudut θ positif. Maka luas yang dihasilkan akan bertanda positif. Namun kenyataannya, di matematika, terutama determinan, dapat menghasilkan luas dan volume yang bertanda positif maupun negatif. Sehingga seorang ilmuwan matematika bernama Grassman membuat sebuah perkalian vektor bernama hasil kali luar yang dituliskan sebagai $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ (yang disebut juga bivektor).

Pada hasil kali luar berlaku

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a} \tag{2}$$

Dapat dilihat bahwa urutan pada hasil kali luar tidak komutatif, sehingga urutan yang berbeda akan menghasilakn interpretasi yang berbeda pula. Gbr 3. Menunjukkan perbedaan interpretasi antara $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ dan $\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}$.



Gambar 3. (a) $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ (b) $\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}$ [1]

Gbr 3(a) menunjukkan bahwa $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ membentuk volume dari vektor **a** dan **b** dengan arah berlawanan jarum jam. Sedangkan Gbr 3(b) menunjukkan bahwa $\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}$ membentuk volume dari vektor **b** dan **a** dengan arah searah jarum jam.

II. DASAR TEORI

2.1. Aljabar Vektor

Secara aljabar kita menggunakan koordinat Kartesius dalam menyatakan vektor. Titik pangkal dan ujung perlu diidentifikasi. Tetapi akan lebih mudah apabila titik pangkal berada di pusat koordinat, sehingga vektor hanya diidentifikasikan oleh titik ujung saja. Misal vektor $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ menyatakan vektor (di bidang) yang pangkalnya di (0,0) dan ujungnya berada di titik (u_1, u_2).

2.1.1. Sifat operasi Vektor

1. $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$
2. $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$
3. $\bar{u} + 0 = 0 + \bar{u} = \bar{u}$
4. $\bar{u} + (-\bar{u}) = 0$
5. $k(l\bar{u}) = (kl)\bar{u}\},\quad k$ dan l adalah konstanta
6. $(k + l)\bar{u} = k\bar{u} + l\bar{u}$
7. $k(\bar{u} + \bar{v}) = k\bar{u} + l\bar{v}$
8. $1\bar{u} = \bar{u}$

2.1.2. Sifat Perkalian Titik

Jika **u, v, w** adalah vektor; dan k adalah skalar maka berlaku

1. $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$
2. $\bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w}$
3. $k(\bar{u} \cdot \bar{v}) = (k\bar{u}) \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot k\bar{v}$
4. $\bar{u} \cdot \bar{u} > 0 \quad$ jika $\bar{u} \neq 0$, dan $\bar{u} \cdot \bar{u} = 0$ jika $\bar{u} = 0$.

2.2. Sifat Hasil Kali Luar

Meskipun hasil kali luar tidak komutatif, tetapi hasil kali luar memiliki sifat yang sama dengan perkalian skalar apabila dikalikan dengan sebuah kelompok vektor.

Hasil kali skalar : $\boldsymbol{a} \,.\, (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{c}$ (3)

Hasil kali luar : $\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c}$ (4)

2.3. Definisi Clifford dalam Hasil Kali Geometri

Clifford mendefinisikan hasil kali geometri dari dua buah vektor **a** dan **b** sebagai

$$\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \tag{5}$$

yang merupakan penjumlahan dari skalar dan bivektor. Hasil kali geometri ini berlaku aksioma-aksioma berikut

1. Asosiatif

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc}) = (\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{abc} \tag{6}$$

$$(\lambda \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{ab}) = \lambda \boldsymbol{bc}\ [\lambda \in \mathbb{R}] \tag{7}$$

2. Distributif

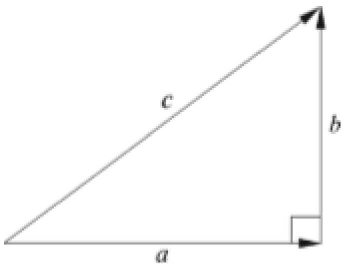
$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac} \tag{8}$$

$$(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{ba} + \boldsymbol{ca} \tag{9}$$

3. Modulus

$$\boldsymbol{a}^2 = \pm|\boldsymbol{a}|^2 \tag{10}$$

2.3.1. Vektor Tegak Lurus



Gambar 4. Vektor Tegak Lurus [1]

Pada vektor tegak lurus berlaku

$$\boldsymbol{ab} = -\boldsymbol{ba} \tag{11}$$

Yang menunjukkan bahwa vektor tegak lurus tidak komutatif.

2.3.2. Vektor Tidak Bebas Lanjar

Gambar 5. Vektor Tidak Bebas Lanjar[1]

Dari Gbr. 5, dapat kita lihat bahwa $\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}$ dan $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$, sehingga

$$\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{a}\lambda\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{aa} = \boldsymbol{ba} \tag{12}$$

Yang menunjukkan bahwa vektor tidak bebas lanjar komutatif.

2.3.3. Hasil Kali Vektor Basis yang Sama

$$e_1 e_1 = e_1 \cdot e_1 + e_1 \wedge e_1 \tag{13}$$

Karena $e_1 \wedge e_1 = 0$ dan $e_1 \cdot e_1 = 1$ maka diperoleh

$$e_1 \cdot e_1 = e_1^2 = 1 \tag{14}$$

Hal yang sama juga berlaku untuk vektor basis yang lain.

$$e_2^2 = 1 \tag{15}$$

2.3.4. Hasil Kali Vektor Basis Tegak Lurus

Hasil kali $e_1 e_2$ adalah sebagai berikut

$$e_1 e_2 = e_1 \cdot e_2 + e_1 \wedge e_2 \tag{16}$$

Karena $e_1 \cdot e_2 = 0$ maka diperoleh

$$e_1 e_2 = e_1 \wedge e_2 \tag{17}$$

Jadi, apabila kita menemukan bivektor $e_1 \wedge e_2$, kita dapat melakukan subtitusi dengan $e_1 e_2$ atau e_{12}.

Dengan cara yang sama, hasil kali $e_2 e_1$ adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} e_2 e_1 &= e_2 \cdot e_1 + e_2 \wedge e_1 \\ &= e_2 \cdot e_1 - e_1 \wedge e_2 \end{aligned} \tag{18}$$

Karena $e_2 \cdot e_1 = 0$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} e_2 e_1 &= -e_1 \wedge e_2 \\ &= -e_{12} \end{aligned} \tag{19}$$

2.3.5. Sifat Imajiner dari Hasil Kali Luar

Sifat imajiner dari hasil kali luar dapat dilihat dengan menghitung hasil kali dari $(e_1 \wedge e_2)^2$

$$\begin{aligned} (e_1 \wedge e_2)^2 &= (e_1 \wedge e_2)(e_1 \wedge e_2) \\ &= e_1 e_2 e_1 e_2 \end{aligned} \tag{20}$$

Karena $e_2 e_1 = -e_1 e_2$, maka

$$(e_1 \wedge e_2)^2 = -e_1 e_1 e_2 e_2 = -e_1^2 e_2^2 \quad (21)$$

Karena $e_1^2 = e_2^2 = 1$ maka

$$(e_1 \wedge e_2)^2 = -1 \quad (22)$$

Jadi unit bivektor memiliki sifat yang sama dengan bilangan imajiner *i*, yaitu apabila dikuadratkan menghasilkan -1.

2.4. Determinan Matriks

Determinan suatu matriks adalah suatu fungsi skalar dengan domain matriks bujur sangkar. Dengan kata lain, determinan merupakan pemetaan dengan domain berupa matriks bujur sangkar, sementara kodomain berupa suatu nilai skalar. Determinan suatu matriks sering digunakan dalam menganalisa suatu matriks, seperti : untuk memeriksa keberadaan invers matriks, menentukan solusi sistem persamaan linear dengan aturan *cramer*, pemeriksaan basis suatu ruang vektor dan lain-lain. Misalkan sebuah matriks bernama A sebagai berikut :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Maka notasi determinan dari matriks A ditulis :

$$\det(A) \text{ atau } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

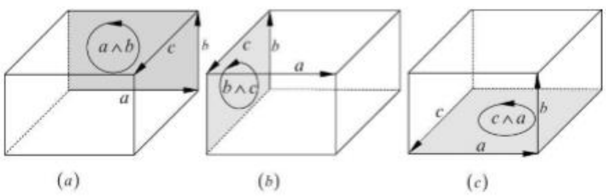
2.4.1. Sifat Determinan Matriks

Determinan matriks mempunyai sifat-sifat sebagai berikut :

1. Jika A adalah sembarang matriks kuadrat, maka det (A) = det (A^T) (23)
2. Jika A dan B merupakan matriks kuadrat berukuran sama, maka : det (A) det (B) = det (AB) (24)
3. Jika A mempunyai invers maka :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \quad (25)$$

III. LUAS *PARALLELEPIPED*



Gambar 5. Bivektor pada *parallelepiped*[1]

Dengan aturan tangan kanan, dapat dilihat pada Gbr 5(a) bahwa arah a ∧ b berlawanan jarum jam dilihat dari dalam volume, lalu bergerak dengan arah c untuk membentuk trivektor (a ∧ b) ∧ c. Pada Gbr 5(b) bivektor b ∧ c juga berputar dengan arah berlawanan jarum jam dilihat dari dalam, lalu bergerak dengan arah a untuk membentuk trivektor (b ∧ c) ∧ a. Terakhir, pada Gbr 5(c) bivektor c ∧ a juga berputar dengan arah berlawanan jarum jam dilihat dari dalam, lalu bergerak dengar arah b untuk membentuk trivektor (c ∧ a) ∧ b. Trivektor ini membentuk volume sebuah *parallelepiped*. Dapat dilihat bahwa volume yang dibentuk pada Gbr 5 adalah sama. Sehingga kita dapat menyatakan

$$(a \wedge b) \wedge c = (b \wedge c) \wedge a = (c \wedge a) \wedge b \quad (26)$$

Walaupun volume pada gambar berbentuk *parallelepiped* siku (balok), tetapi rumus ini berlaku untuk *parallelepiped* pada umumnya.

Vektor a, b, c dinyatakan dalam bentuk vektor basis satuan akan berbentuk seperti di bawah ini.

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e_1} + a_2\boldsymbol{e_2} + a_3\boldsymbol{e_3} \quad (27)$$

$$\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{e_1} + b_2\boldsymbol{e_2} + b_3\boldsymbol{e_3} \quad (28)$$

$$\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{e_1} + c_2\boldsymbol{e_2} + c_3\boldsymbol{e_3} \quad (29)$$

Sehingga trivektor **a** ∧ **b** ∧ **c** dapat dijabarkan sebagai berikut.

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = (a_1\boldsymbol{e_1} + a_2\boldsymbol{e_2} + a_3\boldsymbol{e_3}) \wedge (b_1\boldsymbol{e_1} + b_2\boldsymbol{e_2} + b_3\boldsymbol{e_3}) \wedge (c_1\boldsymbol{e_1} + c_2\boldsymbol{e_2} + c_3\boldsymbol{e_3})$$

$$= \begin{pmatrix} a_1b_1\boldsymbol{e_1}\wedge\boldsymbol{e_1} + a_1b_2\boldsymbol{e_1}\wedge\boldsymbol{e_2} + a_1b_3\boldsymbol{e_1}\wedge\boldsymbol{e_3} + \\ a_2b_1\boldsymbol{e_2}\wedge\boldsymbol{e_1} + a_2b_2\boldsymbol{e_2}\wedge\boldsymbol{e_2} + a_2b_3\boldsymbol{e_2}\wedge\boldsymbol{e_3} + \\ a_3b_1\boldsymbol{e_3}\wedge\boldsymbol{e_1} + a_3b_2\boldsymbol{e_3}\wedge\boldsymbol{e_2} + a_3b_3\boldsymbol{e_3}\wedge\boldsymbol{e_3} \end{pmatrix} \wedge (c_1\boldsymbol{e_1} + c_2\boldsymbol{e_2} + c_3\boldsymbol{e_3})$$

$$= \begin{pmatrix} a_1b_2\boldsymbol{e_1}\wedge\boldsymbol{e_2} - a_1b_3\boldsymbol{e_3}\wedge\boldsymbol{e_1} - \\ a_2b_1\boldsymbol{e_1}\wedge\boldsymbol{e_2} + a_2b_3\boldsymbol{e_2}\wedge\boldsymbol{e_3} + \\ a_3b_1\boldsymbol{e_3}\wedge\boldsymbol{e_1} - a_3b_2\boldsymbol{e_2}\wedge\boldsymbol{e_3} \end{pmatrix} \wedge (c_1\boldsymbol{e_1} + c_2\boldsymbol{e_2} + c_3\boldsymbol{e_3})$$

$$= \begin{pmatrix} (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{e_1}\wedge\boldsymbol{e_2} + \\ (a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{e_2}\wedge\boldsymbol{e_3} + \\ (a_3b_1 - a_1b_3)\boldsymbol{e_3}\wedge\boldsymbol{e_1}) \end{pmatrix} \wedge (c_1\boldsymbol{e_1} + c_2\boldsymbol{e_2} + c_3\boldsymbol{e_3})$$

$$= (a_1b_2 - a_2b_1)c_3\boldsymbol{e_{123}} + (a_2b_3 - a_3b_2)c_1\boldsymbol{e_{123}} + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2\boldsymbol{e_{123}}$$

$$= ((a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3)\boldsymbol{e_{123}} \quad (29)$$

Perhatikan bahwa persamaan terakhir (29) ekuivalen dengan,

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e_{123}} \quad (30)$$

Determinan menyatakan besar dari volume

parallelepiped, sedangkan trivektor menyatakan arah dari volumenya. Sehingga untuk besar volume *parallelepiped* dapat dituliskan

$$V = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{31}$$

IV. PENURUNAN RUMUS *PARALLELEPIPED* KE BENTUK UMUM

Misalkan M adalah matriks 3x3 seperti di bawah ini

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \tag{32}$$

Maka volume dari *parallelepiped* dapat dinyatakan sebagai

$$V = \det(M) \tag{33}$$

Dengan sifat determinan kita juga dapat menyatakan volumenya sebagai determinan dari transpos matriks M.

$$V = \det(M^T) \tag{34}$$

Sehingga dengan mengalikan (34) dan (33) kita dapat menuliskannya menjadi sebagai berikut.

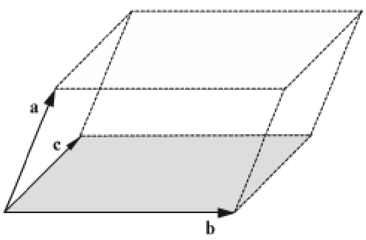
$$\begin{aligned} V^2 &= \det(M^T) * \det(M) \\ &= \det(M^T M) \end{aligned} \tag{35}$$

Dari (35), kita akan mencari hasil dari MM^T terlebih dahulu.

$$\begin{aligned} M^T M &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a.a} & \boldsymbol{a.b} & \boldsymbol{a.c} \\ \boldsymbol{b.a} & \boldsymbol{b.b} & \boldsymbol{b.c} \\ \boldsymbol{c.a} & \boldsymbol{c.b} & \boldsymbol{c.c} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{36}$$

Perhatikan bahwa **a**, **b**, dan **c** merupakan vektor yang masing-masing dinyatakan sebagai berikut.

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$$
$$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$$



Gambar 6. *Parallelepiped*

Dari Gbr. 6, misalkan sudut antara masing-masing vektor disimbolkan dengan α (sudut antara **a** dan **b**), β (sudut antara **b** dan **c**), dan γ (sudut antara **c** dan **a**).
Sehingga dari dengan melakukan subtitusi dari (36) ke (35) kita memperoleh

$$V^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a.a} & \boldsymbol{a.b} & \boldsymbol{a.c} \\ \boldsymbol{b.a} & \boldsymbol{b.b} & \boldsymbol{b.c} \\ \boldsymbol{c.a} & \boldsymbol{c.b} & \boldsymbol{c.c} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} |\boldsymbol{a}|^2 & |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\alpha & |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\cos\gamma \\ |\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\cos\alpha & |\boldsymbol{b}|^2 & |\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\beta \\ |\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}|\cos\gamma & |\boldsymbol{c}||\boldsymbol{b}|\cos\beta & |\boldsymbol{c}|^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} = &\ |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2|\boldsymbol{c}|^2 \\ &+ (|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\alpha * |\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\beta * |\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}|\cos\gamma) \\ &+ (|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\cos\gamma * |\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\cos\alpha * |\boldsymbol{c}||\boldsymbol{b}|\cos\beta) \\ &- (|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\beta * |\boldsymbol{c}||\boldsymbol{b}|\cos\beta) \\ &- (|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\alpha * |\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\cos\alpha * |\boldsymbol{c}|^2) \\ &- (|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\cos\gamma * |\boldsymbol{b}|^2|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}|\cos\gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = &\ |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2|\boldsymbol{c}|^2 + 2|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2|\boldsymbol{c}|^2\cos\alpha\ \cos\beta\cos\gamma \\ &- |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2|\boldsymbol{c}|^2\cos^2\alpha - |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2|\boldsymbol{c}|^2\cos^2\beta \\ &- |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2|\boldsymbol{c}|^2\cos^2\gamma \end{aligned} \tag{37}$$

Dari persamaan terakhir ini, maka diperoleh rumus umum *parallelepiped*

$$V = \sqrt{\begin{matrix} |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2|\boldsymbol{c}|^2 + 2|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2|\boldsymbol{c}|^2\cos\alpha\ \cos\beta\cos\gamma \\ -|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2|\boldsymbol{c}|^2\cos^2\alpha - |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2|\boldsymbol{c}|^2\cos^2\beta \\ -|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2|\boldsymbol{c}|^2\cos^2\gamma \end{matrix}} \tag{38}$$

Keluarkan $|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2|\boldsymbol{c}|^2$ dari dalam akar menjadi

$$V = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}| \sqrt{\begin{matrix} 1 + 2\cos\alpha\ \cos\beta\cos\gamma \\ -\cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma \end{matrix}} \tag{38}$$

V. KESIMPULAN

Parallelepiped merupakan bangun ruang yang rumus volumenya bisa diperoleh dengan pendekatan aljabar geometri. Rumus yang diperoleh dari hasil kali luar tiga buah vektor ini ternyata dapat diturunkan lagi ke rumus yang lebih umum dengan menggunakan sifat-sifat aljabar vektor dan determinan. Sehingga jika sebuah *parallelepiped* diketahui semua panjang rusuknya dan semua sudut antar dua rusuk. Dengan menggunakan persamaan (38), maka dengan mudah dapat diperoleh volumenya.

VI. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis memanjatkan puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas segala kenikmatan sehingga dapat menyelesaikan makalah ini. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Bapak Drs. Judhi Santoso, M.Sc. dan Bapak Dr.Ir. Rinaldi Munir, MT. selaku dosen pengajar mata kuliah Aljabar Geometri atas segala bimbingan serta ilmu yang telah diberikan kepada penulis. Penulis juga menyampaikan rasa terima kasih kepada rekan-rekan penulis yang mendukung dan mendorong penulis dalam menyelesaikan makalah ini. Terakhir, penulis juga menyampaikan terima kasih kepada seluruh pihak yang ikut membantu pembuatan makalah ini baik yang secara langsung maupun tidak langsung.

REFERENSI

[1] Vince, John A., *Geometric Algebra for Computer Graphics,* New York: Springer, 2008.

[2] Macdonald, Alan, *Linear and Geometric Algebra*, Charleston: CreateSpace, 2011.

[3] http://scholarworks.sjsu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=7943&context=etd_theses, diakses pada 14 Desember 2015 pukul 18.00 WIB

[4] http://uyuhan.com/matematika/matriks/determinan-matriks.php, diakses pada 14 Desember 2015 pukul 18.00 WIB

[5] https://www.scribd.com/doc/147011541/Sifat-Vektor, diakses pada 14 Desember 2015 pukul 18.40 WIB

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 14 Desember 2015

Ade Yusuf Rahardian (13514079)