

Aplikasi Aljabar Linear Dalam Genetika

Kevin Supendi 13514094¹

Program Studi Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

¹13514094@std.stei.itb.ac.id

Abstract—Genetika adalah bidang yang mempelajari tentang gen dan penurunan sifat makhluk hidup (hereditas). Sifat-sifat suatu individu sangat dipengaruhi oleh orangtua dari individu tersebut. Aljabar linear diterapkan dalam bidang genetika, terutama pada hukum Mendel. Hukum Mendel menggunakan operasi matriks dalam perhitungannya.

Keywords—Genetika, Hereditas, Hukum Mendel, Matriks

I. PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehari-hari, kita sering mendengar orang-orang di sekitar kita berkata, betapa miripnya kita dengan ayah, atau dengan saudara kita. Perkataan itu ada benarnya, karena setiap individu merupakan hasil percampuran antara kedua sel yang berbeda. Kedua sel ini masing-masing membawa gen dan sifat yang berbeda pula. Sifat-sifat dalam gen inilah yang kemudian dapat muncul dalam suatu individu, dan sifat itu berasal dari orangtua individu itu. Gen ini sudah ada di tubuh kita sejak lahir, dan tidak dapat diubah. Seumpama kode di dalam program, gen menentukan bagaimana bentuk tubuh kita dan sifat-sifat fisik unik yang tidak dimiliki orang lain, bahkan orangtua kita sendiri.

Meskipun untuk kepribadian dan perilaku, hal ini masih diperdebatkan, karakteristik fisik seseorang diturunkan dari orangtua. Orangtua yang mempunyai penyakit A, anaknya juga akan memiliki kemungkinan untuk mengidap penyakit yang sama. Orangtua yang memiliki mata berwarna hitam, anaknya kemungkinan mempunyai warna mata yang sama. Penurunan sifat ini belum tentu sama untuk tiap anak. Anak kembar sekalipun bisa memiliki penampilan fisik yang berbeda.

Sifat dalam gen ini dapat diprediksi. Dengan menganggap bahwa suatu gen pembawa sifat A adalah suatu variable, maka kemungkinan munculnya suatu sifat A dapat diperhitungkan dengan melihat gen dari kedua orangtua itu.

Untuk mempermudah perhitungan, kita dapat menerapkan operasi matriks. Dari hasil perhitungan, kita dapat melihat sifat-sifat mana yang akan muncul dan berapa besar kemungkinannya dibandingkan dengan sifat lain.

II. DASAR TEORI

A. Gen

Genetika adalah bidang yang mempelajari tentang gen. Gen adalah bagian dari DNA, yang membawa suatu informasi. Informasi itu menentukan fungsi tertentu dari tubuh kita. Dalam bidang informatika, suatu kode merupakan informasi. Kode itu kemudian diterjemahkan, dan kemudian program atau mesin akan menjalankan fungsinya sesuai informasi yang terdapat di kode itu. Demikian juga gen, merupakan faktor penting untuk menentukan sifat suatu individu.

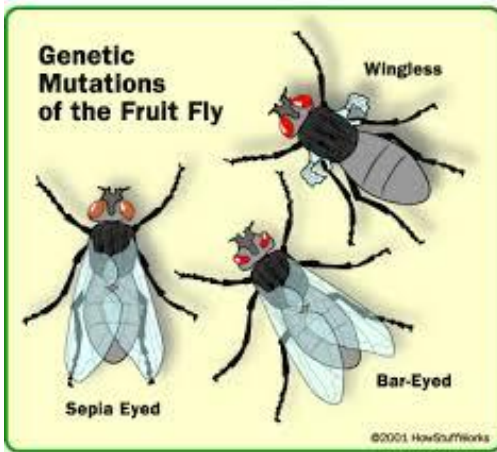
Di dalam genetika ada yang disebut dengan genotip dan fenotip. Genotip adalah susunan gen yang terdapat pada individu. Susunan gen ini biasanya ditulis dengan huruf abjad. Masing-masing sifat direpresentasikan dengan 2 huruf yang sama. Untuk gen yang membawa sifat dominan ditulis dengan huruf besar, sementara untuk gen yang membawa sifat resesif ditulis dengan huruf kecil. Contoh penulisan untuk gen yang membawa sifat kerdil adalah Kk, kk, atau KK. Suatu sifat dinyatakan dominan apabila sifat itu ada di alam dan natural. Sifat-sifat yang langka dinyatakan resesif.

Fenotip adalah sifat yang tampak. Fenotip dipengaruhi oleh genotip dan faktor lingkungan. Individu yang mempunyai genotip yang sama belum tentu memiliki fenotip yang sama.

B. Hereditas

Hereditas adalah penurunan fenotip dari orangtua ke anaknya. Dengan adanya hereditas, maka akan meningkatkan variasi dalam suatu spesies. Contohnya adalah warna mata pada manusia. Tidak semua sifat berasal dari keturunan. Ada fenotip yang muncul karena pengaruh lingkungan, misalnya kulit terbakar. Ada juga sifat yang muncul karena adanya perubahan gen. Perubahan ini disebut dengan mutasi.

Gen mempunyai beberapa variasi bentuk yang disebut alel. Alel merupakan representasi dari genotip. Untuk beberapa sifat yang berbeda, maka alel yang dituliskan juga lebih dari satu, misalkan BBKK untuk sifat bulat dan kuning. Pasangan alel yang sama (seperti BB) disebut homozigot sementara yang berbeda disebut heterozigot.



Gambar 1 Mutasi Sumber:

<http://science.howstuffworks.com/life/evolution/evolution5.htm>

C. Hukum Mendel

Mendel melakukan eksperimen dengan tanaman untuk melihat pengaruh dari gen. Mendel menyilangkan tanaman berwarna ungu dengan berwarna putih. Ia berspekulasi bahwa keturunannya adalah percampuran dari kedua warna itu, namun ternyata hasilnya adalah tanaman berwarna ungu. Saat keturunan tanaman itu disilangkan lagi, ia mendapatkan perbandingan tanaman berwarna ungu dengan tanaman berwarna putih adalah 3:1.

Dari hasil eksperimen tersebut, dia menemukan bahwa yang menentukan penurunan sifat bukanlah fenotip, tetapi suatu faktor lain yang ada di dalam tumbuhan tersebut. Faktor lain yang dimaksud adalah gen. Tumbuhan berwarna ungu dan putih ketika disilangkan semuanya berwarna ungu, berarti gen pembawa warna putih tidak dominan. Kemudian saat keturunan tumbuhan itu disilangkan lagi, muncul warna baru yaitu putih.

Mendel menyimpulkan hasil eksperimennya dan membuat tiga hukum.

Hukum Pemisahan (*Law of segregation*), saat pembentukan sel gamet, alel akan terpisah sehingga tiap sel gamet hanya memiliki satu alel. Misalnya individu A mempunyai alel Aa, maka sel gamet yang dihasilkan ada dua, yaitu sel dengan alel A dan sel dengan alel a.

Hukum Susunan Independen (*Law of independent assortment*), setiap alel dengan sifat yang berbeda tidak mempengaruhi penurunan sifat yang lain. Contoh dari kasus ini adalah untuk individu dengan dengan alel BbKk, pemisahannya menjadi empat jenis, BK, Bk, bK, dan bk.

Hukum Dominansi (*Law of dominance*), organisme yang memiliki satu alel dominan, maka sifat yang muncul adalah sifat yang dominan.

D. Pengecualian Hukum Mendel

Untuk organisme yang bereproduksi secara seksual, kebanyakan mempunyai pola hereditas yang lebih rumit. Contohnya untuk bunga pukul empat (*Mirabilis Jalapa*), kemungkinan warna yang dihasilkan tidak hanya ungu

dan putih, namun untuk pasangan alel heterozigot menghasilkan warna antara, yaitu ungu muda. Hal ini dinamakan dominansi tidak sempurna (*incomplete dominance*).

Situasi berbeda muncul ketika ada ada sifat dari kedua alel yang muncul secara bersamaan. Misalkan ada sapi berwarna merah (RR) disilangkan dengan sapi berwarna putih (rr). Anak yang dihasilkan mempunyai warna merah dan putih. Kedua warna ini muncul secara bersamaan, kondisi ini disebut juga kodominan (*codominance*).

Hukum Mendel menyatakan bahwa variasi alel hanya ada dua jenis, yaitu A untuk dominan dan a untuk alel resesif. Pada kenyataannya banyak organisme yang mempunyai alel banyak. Contohnya adalah variasi golongan darah pada manusia. Alel yang dihasilkan adalah I^A , I^B , I^{AB} , I^O dengan alel O adalah resesif.

Kemudian banyak sifat yang dipengaruhi oleh banyak gen, hal ini disebut dengan sifat poligenik (*polygenic trait*).

E. Matriks

Matriks tersusun atas baris dan kolom. Untuk setiap elemen baris dinamakan dengan i dan kolom ditandakan dengan j, sehingga untuk menunjuk elemen baris i dengan kolom j pada matriks M, biasa disebut dengan elemen M_{ij} . Ukuran matriks adalah baris kali kolom.

Matriks mempunyai beberapa jenis, yaitu :

1. Matriks bujur sangkar, yaitu matriks yang mempunyai jumlah baris dan kolom yang sama.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

jumlah baris = jumlah kolom

Gambar 2 Matriks bujur sangkar

Sumber : <http://hmmusu.blogspot.co.id/2010/07/jenis-jenis-matriks.html>

2. Matriks baris, yaitu matriks yang terdiri dari satu baris.
3. Matriks kolom, adalah matriks yang terdiri dari satu kolom.
4. Matriks tegak, adalah matriks dengan jumlah baris lebih banyak dari jumlah kolom.
5. Matriks datar adalah matriks dengan jumlah kolom lebih banyak dari jumlah baris
6. Matriks nol adalah matriks yang setiap elemennya bernilai 0.

$$O_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gambar 3 Matriks nol Sumber :

<http://hmmusu.blogspot.co.id/2010/07/jenis-jenis-matriks.html>

7. Matriks Diagonal, dimana elemen selain diagonalnya nol.

$$E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Gambar 4 Matriks diagonal Sumber :

<http://hmmusu.blogspot.co.id/2010/07/jenis-jenis-matriks.html>

8. Matriks Identitas, yaitu matriks diagonal yang elemen diagonal utamanya adalah 1.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gambar 5 Matriks identitas Sumber :

<http://hmmusu.blogspot.co.id/2010/07/jenis-jenis-matriks.html>

9. Matriks segitiga, dibagi dua, yaitu matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah. Matriks segitiga atas adalah matriks dengan elemen di bawah diagonal utamanya adalah 0. Sementara matriks segitiga bawah adalah matriks dengan elemen di atas diagonal utamanya adalah 0.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \\ -9 & 5 & 8 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Gambar 6 Matriks segitiga Sumber :

<http://hmmusu.blogspot.co.id/2010/07/jenis-jenis-matriks.html>

10. Matriks skalar, adalah matriks diagonal dengan semua nilai elemennya sama.

$$F = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Gambar 7 Matriks skalar Sumber :

<http://hmmusu.blogspot.co.id/2010/07/jenis-jenis-matriks.html>

11. Matriks transpos, adalah matriks yang didapat dari mengubah baris menjadi kolom.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Transpose}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Gambar 8 Matriks transpos Sumber :

<http://t1nez.blogspot.co.id/2009/01/microsoft-excel-matriks-function.html>

12. Matriks simetri, adalah matriks yang jika ditranspos akan menghasilkan matriks yang sama dengan matriks asal.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{dimana} \quad \begin{matrix} a_{12} = a_{21} \\ a_{13} = a_{31} \\ a_{23} = a_{32} \end{matrix}$$

Gambar 9 Matriks simetri Sumber :

<http://hmmusu.blogspot.co.id/2010/07/jenis-jenis-matriks.html>

Matriks mempunyai cara operasi dalam penjumlahan dan perkalian.

Penjumlahan kedua buah matriks dilakukan dengan menjumlahkan tiap elemen satu persatu. Penjumlahan hanya bisa dilakukan bila jumlah baris dan kolom kedua matriks sama.

Perkalian antara matriks dengan suatu bilangan, dilakukan dengan mengkalikan tiap elemen matriks dengan nilai bilangan tersebut. Untuk perkalian antara dua buah matriks, dapat dilihat melalui gambar.

Perkalian

- a. Perkalian skalar

$$k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

- b. Perkalian matriks dengan matriks

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}$$

Gambar 10 Perkalian matriks Sumber :

<https://konoharakureah.wordpress.com/2011/10/13/aljabar-linier-dan-matriks-part-1/>

Pada matriks juga ada operasi lain, yaitu operasi baris elementer. Operasi ini meliputi pertukaran baris, perkalian baris dengan konstanta tidak nol, dan penjumlahan baris.

F. Sistem Persamaan Linear

Banyak hal yang bisa digambarkan melalui sistem persamaan linear. Dari sistem persamaan linear kita dapat menuliskan dalam bentuk matriks untuk dicari solusinya. Pada matriks sistem persamaan linear berlaku sifat-sifat matriks dan operasi matriks.

- Misal terdapat SPL dengan n buah variabel bebas

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= C_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= C_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &= C_n \end{aligned}$$

Matriks:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$$

Gambar 11 Matriks sistem persamaan linear Sumber :

<http://slideplayer.info/slide/3081033/>

III. APLIKASI MATRIKS DALAM PERSILANGAN

Matriks dapat memudahkan kita dalam memprediksi hasil dari persilangan dan sifat yang akan muncul. Dengan metode perhitungan matriks, perhitungan akan menjadi lebih mudah dimengerti.

Misalkan pada suatu populasi ada tanaman yang mempunyai genotip AA, Aa, dan aa. Alel A dominan terhadap alel a. Alel A menggambarkan tanaman yang tinggi, sementara alel a adalah tanaman yang kerdil.

Jika diketahui pada suatu populasi, perbandingan tanaman dengan genotip AA, Aa, dan aa adalah 1:1:1, maka kita dapat menentukan kemungkinan dari genotip keturunan yang dihasilkan.

Kasus pertama apabila semua tanaman disilangkan dengan tanaman genotip AA homozigot. Pertama kita melihat hasil persilangan tiap genotip. Genotip AA dengan AA akan menghasilkan AA lagi, genotip AA dengan Aa akan menghasilkan AA dan Aa, kemudian AA dengan aa akan menghasilkan Aa. Dari hasil persilangan keturunan pertama ternyata didapati tidak ada tanaman yang kerdil, karena hasil persilangan hanya genotip AA dan Aa, dengan perbandingan 1:1:0.

$$A = \begin{bmatrix} AA & Aa & aa \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} AA \\ Aa \\ aa \end{matrix}$$

Gambar 12 Matriks persilangan Sumber :

<http://aix1.uottawa.ca/~jkhoury/genetics.htm>

Kemudian untuk keturunan kedua didapat lagi hasil yang sama, yaitu genotip AA dan Aa, hanya saja jumlah Aa lebih sedikit. Semakin lama jumlah Aa akan semakin mengecil dan akhirnya semua tanaman akan menghasilkan genotip AA. Jika digambarkan $X_1 = AX_0$ dimana X_n adalah keturunan ke-n. dan A adalah matriks hasil persilangan.

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, X_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}, X_4 = \begin{bmatrix} 15 \\ 16 \\ 1 \\ 16 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots$$

Gambar 13 Matriks keturunan Sumber :

<http://aix1.uottawa.ca/~jkhoury/genetics.htm>

Kasus kedua adalah jika semua tanaman disilangkan dengan genotip Aa. Hasil persilangan untuk genotip AA adalah AA dan Aa, untuk genotip Aa adalah AA, Aa dan aa, dan untuk genotip aa adalah Aa dan aa. Dari keturunan pertama ternyata sudah muncul fenotip tanaman kerdil. Hasil persilangannya adalah sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} AA & Aa & aa \\ 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{matrix} AA \\ Aa \\ aa \end{matrix}$$

Gambar 14 Ilustrasi Matriks persilangan

IV. KESIMPULAN

Aljabar linear sangat luas aplikasinya, bahkan bisa diaplikasikan dalam bidang genetika. Pemodelan persoalan menggunakan sistem persamaan linear dan matriks dapat memudahkan persoalan, sehingga solusi yang didapat lebih baik dan mudah dimengerti.

V. UCAPAN TERIMA KASIH

Pertama saya mau mengucapkan terimakasih kepada Tuhan Yang Maha Esa, sehingga makalah ini dapat selesai tepat waktu. Saya juga berterima kasih kepada teman-teman dan sumber-sumber yang telah menginspirasi saya dalam penulisan makalah ini. Saya juga bersyukur atas orangtua saya yang telah menyekolahkan saya hingga saya dapat kuliah di ITB. Terimakasih juga saya sampaikan kepada Pak Rinaldi dan Pak Judhi, sebagai dosen IF2123 yang telah mengajar saya selama setengah tahun ini. Banyak pelajaran yang saya terima dari mereka.

REFERENCES


- [1] Aryulina, Diah.dkk.2004. Biologi SMA Untuk kelas X. Erlangga: Jakarta
- [2] <http://hmmusu.blogspot.co.id/2010/07/jenis-jenis-matriks.html> diakses tanggal 16 Desember 2015 pk. 07.21 WIB
- [3] <http://www.mendelweb.org/Mendel.html> diakses tanggal 16 Desember 2015 pk. 06.16 WIB
- [4] <http://handikap60.blogspot.co.id/2013/07/pengertian-genotip-dan-fenotip.html> diakses tanggal 16 Desember 2015 pk. 07.21 WIB

- [5] <http://aix1.uottawa.ca/~jkhoury/genetics.htm> diakses tanggal 16 Desember 2015 pk. 07.31 WIB
- [6] <https://konoharakureah.wordpress.com/2011/10/13/aljabar-linier-dan-matriks-part-1/> diakses tanggal 16 Desember 2015 pk. 07.53 WIB
- [7] <http://slideplayer.info/slide/3081033/> diakses tanggal 16 Desember 2015 pk. 07.55 WIB

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 16 Desember 2015

DocuSigned by:
 ttd
33359D9A0B44435...

Kevin Supendi 13514094